Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen
12. Übungsblatt

Aufgabe 33: Herleitung einer harmonischen Funktion *(10 Punkte)*

Eine reellwertige zweimal stetig differenzierbare Funktion u auf einer offenen Menge U in $\mathbb{R}^2$ wird *harmonisch* genannt, falls

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x,y) = 0 \quad \text{für alle } (x,y) \in U.$$

Man beweise, dass es genau ein $\lambda \in C^2(]0,\infty[)$ mit $\lambda(1) = 0$ gibt, so dass $u_\lambda : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $u_\lambda(x,y) := \lambda(\sqrt{x^2+y^2})$ harmonisch ist.

Aufgabe 34: Der Grenzwert einer fraktionellen Integralfolge *(10 Punkte)*

Es seien $\beta \in]0,1]$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Borel-messbarer Funktionen auf $[0,1]$ mit $\lim_{n\uparrow\infty} f_n(x) = 0$ für fast alle $x \in [0,1]$. Es gäbe ein $c \geq 0$ und ein $\alpha \in]\beta - 1, 1]$, so dass

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq c|x-y|^\alpha \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}$$

und alle $x, y \in [0,1]$ mit $x \neq y$. Man zeige, dass folgender Grenzwert existiert, und bestimme diesen:

$$\lim_{n\uparrow\infty} \int_{[0,1]^2} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x-y|^\beta} \, d\lambda_2(x,y).$$

Aufgabe 35: Ein Lebesgue-Integral über dem Einheitskreis *(15 Punkte)*

Es bezeichne $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ den offenen Einheitskreis. Man leite den Wert des Integrals

$$\int_K \tan\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right)\right) d\lambda_2(x,y)$$

her, indem man die Stammfunktion von tan bestimme und die trigonometrischen Identitäten $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$ und $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ verwende.