



Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin

Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen

10. Übungsblatt

Aufgabe 28: Beispiel zur Trennung der Variablen

(10 Punkte)

Für $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 < 0$ und $\alpha, \beta > 0$ soll in dieser Aufgabe geprüft werden, ob eine auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung zu der Differentialgleichung

$$x' = \frac{1}{\alpha + \beta|x|}, \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

mithilfe des Satzes 17.2.2 zur Trennung der Variablen bestimmt werden kann. Dazu gehen wir wie folgt vor:

- (a) Man leite ein $t_1 > t_0$ und eine stetige Funktion $\lambda_1 :]-\infty, t_1] \rightarrow]-\infty, 0]$ her, so dass

$$\int_{x_0}^x \alpha + \beta|\xi| d\xi = t - t_0 \quad (2)$$

für $(t, x) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0]$ genau dann erfüllt ist, wenn $t \leq t_1$ und $x = \lambda_1(t)$.

- (b) Als Nächstes gebe man eine stetige Funktion $\lambda_2 : [t_1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ an, so dass (2) für $(t, x) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[$ genau dann gilt, wenn $t \geq t_1$ und $x = \lambda_2(t)$.
- (c) Sind die Einschränkungen von λ_1 und λ_2 auf $] -\infty, t_1[$ bzw. $]t_1, \infty[$ Lösungen von (1), die zu einer auf $\mathbb{R}$ definierten Lösung zusammengesetzt werden können?

Aufgabe 29: Beispiel zur Variablentransformation

(10 Punkte)

Indem man eine geeignete Variablentransformation verwende, leite man für $t_0, x_0 > 0$ eine Lösung zu der Differentialgleichung

$$x' = \frac{t^3 + x^3}{tx^2}$$

mit Anfangswertbedingung $x(t_0) = x_0$ her.

Aufgabe 30: Lösungen autonomer Differentialgleichungen

(15 Punkte)

In dieser Aufgabe soll für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gezeigt werden, dass jede Lösung der autonomen Differentialgleichung

$$x' = f(x) \quad (3)$$

monoton ist. Dazu beweisen wir eine allgemeinere Aussage unter folgenden Voraussetzungen: Es seien I ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $I^\circ \neq \emptyset$ und $x \in C(I)$ eine nicht-monotone Funktion, die auf I° differenzierbar ist.

- (a) Man weise nach, dass es $a, b \in I^\circ$ mit $a < b$ gibt, so dass $x'(a)x'(b) < 0$. Anschließend zeige man, dass ein $\xi \in]a, b[$ existiert, so dass

$$x(\xi) > x(a) \vee x(b) \text{ im Fall } x'(a) > 0 \text{ bzw. } x(\xi) < x(a) \wedge x(b), \text{ falls } x'(a) < 0.$$

- (b) Man folgere aus (a), dass $s, t \in I$ mit $s < t$ existieren, so dass $x(s) = x(t)$ und $x'(s) \neq x'(t)$. Und zwar, $s \in [a, \xi[$ und $t \in]\xi, b]$.
- (c) Man verwende die Aussage aus (b), um zu zeigen, dass es keine nicht-monotone Lösung von (3) geben kann.