Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 25: (F14T1A3)
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\cos(x)$$

a) Wandeln Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung um in ein äquivalentes System erster Ordnung mit den Variablen x und y um.

b) Hat diese Differentialgleichung für jede Anfangsbedingung eine eindeutige maximale Lösung?

c) Sind die maximalen Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

d) Man zeige, daß die Funktion $S(x,y) = 2\sin(x) + y^2$ ein erstes Integral ist.

Aufgabe 26: (H01T2A1)
Skizzieren Sie die Phasenportraits der ebenen autonomen Systeme $\dot{x} = Ax$ für die drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 27: (H19T2A2) Wir betrachten die Funktion $\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \end{array}$
(Schraubenlinie) und versehen \$$\mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Norm $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Zeigen Sie:

a) $\gamma(\mathbb{R})$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.

b) Für jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ existiert ein $t_p \in \mathbb{R}$, so daß

$$\|\gamma(t_p) - p\| = \min\{\|\gamma(t) - p\| : t \in \mathbb{R}\}. \tag{1}$$

c) Erfüllt t_p die Bedingung (1) aus b), so gilt:

$$\gamma'(t_p) \perp (\gamma(t_p) - p).$$

d) Bestimmen Sie für $p = (2, 0, 0)$ alle Lösungen t_p von (1). Begründen Sie insbesondere die Vollständigkeit Ihrer Lösung.