Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 22: (F18T3A2)

(a) Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extrema der Funktion $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xe^{x-y^2} \end{array}$.

(b) Zeigen Sie, daß alle stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2xy && (1) \\ \dot{y} &= 1+x && (2) \end{aligned}$$

stabil sind, wobei $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Verwenden Sie dazu das Resultat aus Teilaufgabe a).

Aufgabe 23: (H10T2A4)
Für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1 \end{aligned}$$

bestimme man ein nicht-konstantes erstes Integral, dh. eine nicht-konstante Funktion $E:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, die längs der Lösungskurven konstant ist.

Aufgabe 24: (H19T1A2) Sei $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2y+xy^2-xy \end{array}$.

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und untersuchen Sie, ob an diesen lokale Extrema vorliegen oder ob es sich um Sattelpunkte handelt.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie in $Q=]-1,2[\times]-1,2[\subseteq\mathbb{R}^2$ die Menge $\{(x,y)\in Q: f(x,y)=0\}$.

c) Sei $T\subseteq\mathbb{R}^2$ das abgeschlossene Dreieck im ersten Quadranten, das durch die Geraden $y=0$, $x=0$ und $x+y-1=0$ berandet ist. Begründen Sie, daß die Funktion f eingeschränkt auf T ihr Maximum und ihr Minimum annimt und bestimmen Sie alle Punkte in T, an denen dieses Maximum bzw. dieses Minimum angenommen werden zusammen mit den zugehörigen Funktionswerten.

d) Skizzieren Sie nur mit Hilfe der Ergebnisse aus a) bis c) qualitativ die Niveaulinien der Funktion f im Quadrat q, so daß man den Typ der kritischen Punkte klar aus der Skizze ablesen kann.