Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 19: (H19T3A5)

a) Seien $f, g : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und

$$\begin{array}{rcl} p:]0,\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (r,\varphi) & \mapsto & f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\cos(\varphi) + g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\sin(\varphi) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} q:]0,\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (r,\varphi) & \mapsto & \frac{1}{r}(g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\cos(\varphi) - f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\sin(\varphi)). \end{array}$$

Zeigen Sie: Ist $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I \to]0,\infty[\times\mathbb{R}$ eine Lösung des Systems

$$\begin{array}{rcl} r' & = & p(r,\varphi) \\ \varphi' & = & q(r,\varphi) \end{array}$$

so ist

$$\begin{array}{rcl} \beta : I & \to & \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \\ t & \mapsto & (\beta_1(t), \beta_2(t)) = (\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))) \end{array}$$

eine Lösung des Systems

$$\begin{array}{rcl} x' & = & f(x,y) \\ y' & = & g(x,y). \end{array}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{array}{rcl} x' & = & y + x^3 + xy^2 \\ y' & = & -x + x^2y + y^3 \\ (x(0), y(0)) & = & (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \end{array}$$

auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 20: (H13T3A2) Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{x} = A_a x$ mit der reellen $3 \times 3-$Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die es eine nichttriviale Lösung $x(t)$ gibt mit $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

Aufgabe 21: (H19T3A1)

a) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die in keinem Punkt stetig ist. Zeigen Sie dabei explizit die Unstetigkeit in jedem Punkt.

b) Geben Sie eine Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, die integrierbar ist, aber nicht stetig. Begründen Sie dabei diese Eigenschaften. (Sie können sich auf das Riemann- oder das Lebesgue-Integral beziehen.)