# Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 16:** (H19T2A1)

a) Bestimmen Sie die Menge der komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für welche die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^k}$ konvergiert, Leiten Sie im Fall der Konvergenz einen möglichst einfachen Term für den Grenzwert her.

b) Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = -x^2, \quad x(1) = -2.$$

Geben Sie hierbei auch den Definitionsbereich dieser Lösung explizit an.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'(t) - 2y(t) = \cos(2t).$$

**Aufgabe 17:** (H19T3A4)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der homogenen reellen Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der inhomogenen reellen Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 15e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

c) Zeigen Sie, daß es genau eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f''(z) + 2f'(z) + 2f(z) = 15e^z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ sowie $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$ und bestimmen Sie diese.

**Aufgabe 18:** (F16T3A5) Es sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie das Fundamentalsystem $e^{At}$ zu $x' = Ax$.

b) Bestimmen Sie die Lösung von

$$x' = Ax \quad , \quad x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Zeigen Sie, daß die Ruhelösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stabil ist.