Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 13: (H17T3A3)
Für $u_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man für $t \geq 0$ das Anfangswertproblem

$$u'(t) = u(t) + \frac{1}{1+t}, \quad u(0) = u_0.$$

Zeigen Sie:

a) Für jedes u_0 existiert eine eindeutige Lösung auf ganz $\mathbb{R}^+$.

b) $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \infty$ für jedes $u_0 \geq 0$.

c) Es existiert ein $u_0 < 0$, so daß $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = -\infty$.

d) Es existiert ein $\alpha < 0$ so daß $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \infty$ für jedes $u_0 > \alpha$, $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = -\infty$ für jedes $u_0 < \alpha$ und $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) \in \mathbb{R}$ für $u_0 = \alpha$.

Aufgabe 14: (H19T1A5)

a) Geben Sie zu beliebig vorgegebenen Anfangswerten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung des linearen Systems von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ explizit an und weisen Sie nach, daß diese Lösung die einzige ist. Zeigen Sie weiter, daß es für jede Lösung des Systems eine Konstante $C(x_0, y_0)$ gibt mit

$$x(t)^2 - y(t)^2 = C(x_0, y_0) \qquad \text{für alle } t.$$

Geben Sie $C(x_0, y_0)$ explizit an.

b) Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt im offenen dritten Quadranten, dh. es gelte $x_0 < 0$ und $y_0 < 0$. Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{y^2+1}{2xy}, \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutig bestimmte maximale Lösung besitzt und bestimmen Sie diese explizit unter Angabe ihres Definitionsbereichs.

Aufgabe 15: (F14T3A5)
Es seien $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.

b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax + b(t), x(0) = 0$.