Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 10: (H09T1A3)
Für jedes $E \in \mathbb{C}$ betrachten Sie die Differentialgleichung

$$H'' - 2zH' + (E-1)H = 0$$

für eine Funktion H, die analytisch in der Variablen z ist.

a) Bestimmen Sie die Lösungen der Form $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$. Zeigen Sie, daß die Koeffizienten eine Rekursionsrelation erfüllen, die Sie angeben sollen.

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

c) Geben Sie die geraden Lösungen an.

d) Für welche Werte von E ist die Lösung von (c) ein Polynom?

Aufgabe 11: (F14T3A4) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_1 x_2 \\ \dot{x_2} &= e^{x_1}(1-x_2^2) \end{aligned}$$

mit $x(0) = (1, 0)$. Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem hat eine eindeutige maximale Lösung

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$$

auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$.

b) Für alle $t \in I$ gilt $-1 < \lambda_2(t) < 1$.

c) $I = \mathbb{R}$

d) $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = (0,1)$ und $\lim_{t\to-\infty} \lambda(t) = (0,-1)$.

Aufgabe 12: (H04T1A2)
Seien p und q stetige reelle Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$

a) Zeigen Sie, daß durch eine geeignete Transformation jeder positiven Lösung y der nichtlinearen Gleichung

$$y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = 0$$

eindeutig eine positive Lösung z der linearen Gleichung

$$z' + (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x) = 0$$

zugeordnet werden kann.

b) Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertproblems

$$y' + y - x\sqrt{y} = 0, \quad y(0) = 0.$$

Ist die von Ihnen gefundene Lösung eindeutig?