Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 4: (F05T2A1)
Für welche $p \in]0, \infty[$ besitzt das Anfangswertproblem

$$x' = x^p,\ x(0) = 1 \tag{1}$$

eine eindeutige Lösung, dessen maximales Lösungsintervall

a) $[0, \infty[$

b) $]-\infty, 0]$

enthält?

Aufgabe 5: (H06T2A3)
Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ zwei $C^\infty-$Funktionen; wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$\dot{x} = f(t)g(x).$$

Sei x_0 eine Zahl zwischen zwei Nullstellen von g, dh. $x_1 < x_0 < x_2$ und $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Folgt aus diesen Angaben bereits, daß die maximale Lösung von

$$\dot{x} = f(t)g(x), \quad x(0) = x_0$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6: (F09T1A4)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Der topologische Abschluß M der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ sei kompakt. Man zeige:

a) Eine Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(x), x(0) = x_0$ verläuft für jeden Punkt $x_0 \in M$ vollständig in M.

b) Das Anfangswertproblem $x' = f(x), x(0) = x_0$ ist für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ global lösbar.