Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 37: (F13T3A2)

a) Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0$. Zeigen Sie, daß

$$|\sin(z)| \geq \frac{1}{2}(e^{|y|} - e^{-|y|})$$

ist. (Hinweis: Man kann von der Formel $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ohne Beweis Gebrauch machen.)

b) Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(z) := \dfrac{\sin(nz)}{n}$ für $z \in \mathbb{C}$. Geben Sie die Menge M aller Punkte $z \in \mathbb{C}$ an, für die $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzfunktion

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), \quad z \in M.$$

Aufgabe 38: (H00T1A5)
Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind und geben Sie in jedem der Fälle eine kurze Begründung (Beweis oder Gegenbeispiel).

a) Die komplexe Sinusfunktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat die gleichen Nullstellen wie ihre Einschränkung auf die reelle Achse.

b) Für den einmal im positiven Sinne durchlaufenen Einheitskreis S_1^+ gilt:

$$\int_{S_1^+} \frac{e^z - 1}{z} dz = 2\pi i.$$

c) Genügt eine ganze Funktion f der Beziehung $|f(z)| \leq |e^z|$, so gilt $f(z) = ce^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit einem $c \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 39: (H02T2A1)
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gibt eine holomorphe Funktion f auf einer offenen Umgebung um 0 mit der Eigenschaft

$$|f^{(n)}(0)| \geq (n!)^2 \quad \text{für allen} \in \mathbb{N}.$$

b) Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$f(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0, \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$$

c) Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{Re}\, f(z) = (\mathrm{Im}\, f(z))^2 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

ist konstant.