Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 34: (H19T1A1)

a) Für $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ bezeichne $\partial B(c,r)$ den Rand der Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius r in der komplexen Ebene. Der Rand der Kreisscheibe werde einmal entgegen dem Uhrzeigersinn, dh. in mathematisch positiver Richtung, durchlaufen. Berechnen Sie die Integrale

$$\int\limits_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2+1)}{z^2-2019}dz \quad \text{und} \quad \int\limits_{\partial B(0,2)} \frac{\sin(z)}{(z-1)^3}dz$$

b) Berechnen Sie die Umlaufzahl/Windungszahl um Null für den Weg $\begin{array}{rcl} \gamma : [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\cos(e^{it})^2 \end{array}$.

Aufgabe 35: (H02T1A1)
Sei f eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1+\rho\}$ mit $\rho > 0$ und

$$|f(e^{i\theta})| = c \quad \text{für } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Es sei $z = 0$ eine einfache Nullstelle von f und $f(z) \neq 0$ für $z \in G \backslash \{0\}$. Man zeige: Es existiert ein $c_1 \in \mathbb{C}$ mit $|c_1| = c$, so daß $f(z) = c_1 z$ für alle $z \in G$ gilt.

Aufgabe 36: (H10T2A2)
Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion für die $|f(0)| < 1$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt. Man zeige, daß dann sogar $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gelten muß.