Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 31: (H19T3A3)

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville über ganze Funktionen.

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie: Ist der Imaginärteil $\operatorname{Im}(f) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, so ist f konstant.

Aufgabe 32: (H19T1A3)

a) Sei $B(0, \frac{3}{2})$ die offene Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius $\frac{3}{2}$ in der komplexen Ebene. Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : B(0, \frac{3}{2}) \to \mathbb{C}$, die in allen $n \in \mathbb{N}$ die Werte $f\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{2n}{2n+1}$ annehmen.

b) Formulieren Sie das Maximumsprinzip für beschränkte Gebiete (auch Randmaximumsprinzip für holomorphe Funktionen genannt) und beweisen Sie damit folgende Aussage: Für $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ bezeichne $B(c, r)$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius r in der komplexen Ebene. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes Gebiet und $B = B(c, r)$ eine Kreisscheibe mit $\overline{B} \subseteq D$. Weiter sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\min\{|f(z)| : z \in \partial B\} > |f(c)|.$$

Dann besitzt f eine Nullstelle in B.

Aufgabe 33: (F13T2A1)

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist das Polynom $u(x, y) = x^2 + 2axy + by^2$ der Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$?

b) Bestimmen Sie für jedes solche Paar (a, b) den Imaginärteil aller zugehörigen holomorphen Funktionen.