Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 28: (F18T2A2)
Diese Aufgabe befaßt sich mit der Maximierung der Funktion

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 4(x+y) \end{array}$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$.

a) Zeigen Sie die Existenz einer globalen Maximalstelle.

b) Berechnen Sie die globale Maximalstelle und bestimmen Sie das Maximum von f unter obiger Nebenbedingung.

Aufgabe 29: (F18T2A3)
Seien $R > \rho > 0$. Betrachten Sie die Menge

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2, x^2 + y^2 > \rho^2\}.$$

Anschaulich betrachtet ist dies die Menge, die aus einer Kugel mit Radius R durch „Ausbohren“ eines Zylinders vom Radius ρ entsteht. Berechnen Sie das Volumen von M.

Aufgabe 30: (F18T1A2) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.
Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei beliebige Funktionen. Dann gilt:

a) Ist f stetig, dann ist $\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int\limits_0^{g(x)} f(t)dt \end{array}$ ebenfalls stetig.

b) Ist f stetig und ist g differenzierbar, dann ist $\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int\limits_0^{g(x)} f(t)dt \end{array}$ ebenfalls differenzierbar.

c) Ist f beschränkt und differenzierbar und existiert $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ im eigentlichen Sinne (dh. dieser Grenzwert existiert und hat einen endlichen Wert), dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.