

## Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 1:** (H14T1A4)

Für welche  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}, \quad x(0) = x_0$$

lokal eindeutig lösbar? Für welche  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist es global eindeutig lösbar?

**Aufgabe 2:** (F05T1A1)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$u'' = -4u + 4u' \tag{1}$$

b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad \text{für } x > 0. \tag{2}$$

Durch die Substitution  $x = e^t$  und  $y(e^t) = u(t)$  (wegen  $x > 0$ ) geht die obige Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für  $u(t)$  über. Wie lautet diese? Geben Sie die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (2) an.

**Aufgabe 3:** (F11T1A1)

Untersuchen Sie für die Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y-1|}$$

jeweils, ob es Lösungen mit den wie folgt vorgegebenen Werten gibt, und geben Sie im Falle der Existenz alle solchen Lösungen an:

a)  $y(0) = 0$  und  $y(1) = 2$

b)  $y(0) = 0$  und  $y(2) = 2$

c)  $y(0) = 0$  und  $y(3) = 2$