Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 29: (F11T1A5)
Gegeben sei die Funktion $\begin{array}{rcl} g : D & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{\sin(z^2-4z)} \end{array}$ mit maximaler Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten der Funktion g sowie jeweils deren Typ (hebbar? Polstelle wievielter Ordnung? wesentlich?).

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) den Konvergenzradius der Potenzreihe für g um den Punkt 0. (Diese Formulierung gibt auch einen kleinen Hinweis für (a).)

Aufgabe 30: (F18T3A1)

a) Zeigen Sie, daß das uneigentliche Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx$$

existiert.

b) Berechnen Sie I mithilfe des Residuensatzes. Geben Sie insbesondere Integrationspfade expilizit an und weisen Sie nach, daß die Werte der Kurvenintegrale gegen das entsprechende Integral konvergieren.

Aufgabe 31: (F16T3A1)
Es sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sin\left(\dfrac{1}{z}\right) \end{array}$.

a) Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularität von f bei 0.

b) Es sei $\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ t & \mapsto & e^{2it} \end{array}$, berechnen Sie $\int_\gamma f(z)dz$.

c) Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$. Zeigen Sie, daß es keine Folge von Polynomfunktionen $(p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so daß $(p_n|_U)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f|_U$ konvergiert.

Aufgabe 32: (H19T2A5)

a) Formulieren Sie den Riemannschen Abbildungssatz.

b) Formulieren Sie das Schwarzsche Lemma.

c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $z_0 \in \Omega \neq \mathbb{C}$. Es seien $f : \Omega \to \Omega$ und $g : \Omega \to \Omega$ biholomorph mit $f(z_0) = g(z_0)$ und $f'(z_0) = g'(z_0)$. Zeigen Sie, dass $f = g$ gilt.

Aufgabe 33: (H13T2A1) Betrachten Sie das Gebiet

$$G := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}.$$

Geben Sie eine biholomorphe Abbildung von G auf die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$$

an. Hinweis: Bilden Sie zunächst G mit einer Möbiustransformation auf den Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ ab und nutzen Sie dann die Exponentialfunktion.