Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 15: (F18T3A4)

a) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine schiefsymmetrische Matrix (dh. $B^T = -B$). Zeigen Sie: $x^T Bx = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Seien $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetige Abbildungen, so daß $A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ positiv semidefinit und $B(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ schiefsymmetrisch ist. Zeigen Sie, daß $\begin{array}{rcl} V : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^T x \end{array}$ eine Lyapunov-Funktion zu

$$\dot{x} = -(A(x) + B(x))x$$

ist, dh. zeigen Sie $\dot{V}(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

c) Auf $\mathbb{R}^2$ sei die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + xy^2 \\ \dot{y} &= -x^2 y - 2y \end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß der Ursprung eine stabile Ruhelage ist.

Aufgabe 16: (F18T2A5)
Betrachten Sie zu $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) - 4u(x) + 4u^3(x) &= 0 \\ u(0) &= u_0 \\ u'(0) &= u_1 \end{aligned}$$

a) Finden Sie eine nichtnegative Funktion $G \in C(\mathbb{R})$, so daß

$$L(x) := \frac{1}{2}(u'(x))^2 + G(u(x))$$

konstant in x ist.

b) Zeigen Sie, daß dieses Anfangswertproblem für beliebige $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $u \in C^2(\mathbb{R})$ hat.

c) Bestimmen Sie stationäre Lösungen der Differentialgleichung. Welche Aussagen zur Stabilität lassen sich allein durch Anwendung des Prinzips der linearen Stabilität treffen?

Aufgabe 17: (F01T3A5) Gegeben sei die Differentialgleichung $\ddot{x} = -x + x^3$.

a) Bestimmen Sie ein erstes Integral dieser Differentailgleichung, indem Sie zunächst mit $\dot{x}$ multiplizieren und anschließend über Intervalle $[0,t]$ integrieren.

b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte ($\dot{x} = 0$) und zeichnen Sie ein Phasenportrait mit Richtungspfeilen.

c) Für welche Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y_0$ bleibt die maximale Lösung beschränkt?

Aufgabe 18: (F04T2A5) Gegeben sei das autonome System

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x + 2x^3 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle Gleichgewichtspunkte von (1).

b) Skizzieren Sie die Trajektorien für das zugeordnete lineare System.

c) Zeigen Sie, daß unter den Trajektorien aus (b) nur diejenige für $t \to \infty$ gegen $(0,0)$ strebt, für die immer $y = -x$ gilt.

d) Bestimmen Sie die Trajektorien des Systems (1).

Aufgabe 19: (F09T2A1) Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem

$$x' = -y + x\sin(x^2 + y^2) \tag{2}$$
$$y' = x + y\sin(x^2 + y^2) \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie alle periodischen Orbits.

b) Skizzieren Sie das Phasenportrait.

Hinweis: Man transformiere auf Polarkoordinaten. Zunächst bestimme man eine Differentialgleichung für $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Aufgabe 20: (H04T2A4)
Sei $\varepsilon > 0$ und $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion mit $\|w(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| < \varepsilon$, wobei $\|x\| = \|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Es sei weiter $\lambda : [0, \infty[\to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -x + w(x).$$

Schätzen Sie $\frac{d}{dt}\|\lambda(t)\|^2$ ab und folgern Sie aus Ihrem Ergebnis, daß aus $\|\lambda(0)\| < \varepsilon$ stets $\|\lambda(t)\| < \varepsilon$ für alle $t > 0$ sowie $\lambda(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ folgt.