Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 9: (F12T3A5)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme ein Fundamentalsystem des homogenen Differentialgleichungssystems $x' = Ax$.

Aufgabe 10: (H19T1A4) Sei $\beta \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Differentialgleichung

$$y'' - 2\beta y' + \beta^2 y = 0$$

b) Bestimmen Sie alle Werte $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

für alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to R$ der homogenen Gleichung mit dem jeweiligen Parameter β.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y''(t) - 2\beta y'(t) + \beta^2 y(t) = e^{-2t}.$$

Hinweis zu c): Eine Fallunterscheidung in β ist notwendig,

Aufgabe 11: (H07T2A5)
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = A(\alpha)x$ auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha + 2 & 1 \\ -2 & \alpha - 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem des Systems.

b) Geben Sie jeweils die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$ an, so daß $(0, 0)$ ein stabiler bzw. asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt des Systems $\dot{x} = A(\alpha)x$ ist.

Aufgabe 12: (F09T2A2)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, daß die Ruhelage für das System $x' = Ax$ asymptotisch stabil ist.

b) Weiterhin sei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ stetig. Zeigen Sie, daß jede Lösung y der Gleichung $y' = Ay + b(t)$ asymptotisch stabil ist, indem Sie zeigen, daß für zwei Lösungen y und $\tilde{y}$ immer gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \|\tilde{y}(t) - y(t)\| = 0$$

Aufgabe 13: (H11T1A4)
Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^t, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14: (H19T2A4)
Gegeben sei ein Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ und reelle $(n \times n)-$Matrizen A, B, M. Wir betrachten die affine Differentialgleichung

$$\dot{x} = Mx + c. \tag{1}$$

Zeigen Sie:

a) Ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1) zum Anfangswert $y(0) = 0$, so ist

$$x(t) = e^{tM}x_0 + y(t), t \in \mathbb{R}$$

die eindeutig bestimmte Lösung zu dem Anfangswert $x(0) = x_0$.

b) Genau dann existiert für jedes $d \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\dot{x} = Mx + c, \quad Ax(0) + Bx(1) = d, \tag{2}$$

wenn die Matrix

$$C := A + Be^M$$

invertierbar ist. Unter der Annahme, daß dies der Fall ist, drücken Sie die Lösung des Randwertproblems (2) durch y wie in a) aus.
Hinweis: Schreiben Sie eine Lösung x in der in a) beschriebenen Form.

c) Setzen wir

$$F(X) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^{k-1}}{k!}$$

für eine reelle $(n \times n)-$Matrix X, so ist die in a) definierte Funktion y gegeben durch

$$y(t) = tF(tM)c.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, daß man bei konvergenten Potenzreihen Summation und Ableitung vertauschen darf.