Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (H13T2A4)
Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y' = t^2\sqrt{1+2y}$$

a) Geben Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit Anfangswert $y(0) = 0$ auf dem Intervall $[0,\infty[$ an. Warum ist sie dort eindeutig?

b) Betrachten Sie die Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = -\frac{1}{2}$. Geben Sie zwei verschiedene Lösungen dieser Anfangswertaufgabe explizit an.

Aufgabe 2: (F14T2A1)

$$x' = \frac{xt}{\sqrt{x^2+1}} \quad , \quad x(0) = 1 \tag{1}$$

Zeige:

a) Das Anfangswertproblem (1) hat eine eindeutige maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$.

b) Für das maximale Lösungsintervall gilt: $I = \mathbb{R}$.

c) Für alle $t \geq 0$ ist $\lambda(t) \in [1, 1 + \frac{t^2}{2}]$.

Aufgabe 3: (H00T1A2)
Gegeben sei für $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ das zwei-dimensionale Anfangswertproblem

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x) \\ \dot{y} & = & g(x)y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x(0) & = & \xi \\ y(0) & = & \eta \end{array}\right. \tag{2}$$

mit Lipschitz-stetigem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und stetigem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie an Hand eines Beweises und eines Gegenbeispiels, daß dieses Problem eine eindeutige Lösung besitzt, obwohl der Satz von Picard-Lindelöf nicht anwendbar ist.

Aufgabe 4: (F12T1A5)
Für $\xi \in \mathbb{R}$ sei das Anfangswertproblem

$$x' = \arctan(x), \qquad x(0) = \xi \tag{3}$$

gegeben. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Das Anfangswertproblem (3) besitzt genau eine maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$.

b) λ_ξ besitzt genau dann eine Nullstelle, wenn $\xi = 0$ ist.

c) Für alle $t \in I_\xi$ gilt:

$$\xi - \frac{\pi}{2}\,|t| \leq \lambda_\xi(t) \leq \xi + \frac{\pi}{2}\,|t|.$$

d) $I_\xi = \mathbb{R}$.

Aufgabe 5: (H16T1A3)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = -\tan(y)e^y, \quad y(0) = -1$$

a) Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ besitzt.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} y(x)$.

Aufgabe 6: (F15T1A4) Bestimmen Sie eine reelle Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y(x)y'(x) + y(x)^2 + 2x + 5 = 0, \quad y(-4) = -2.$$

Wie groß kann das Intervall I maximal gewählt werden?
Hinweis: Eine Möglichkeit der Lösung besteht darin, zunächst einen integrierenden Faktor $u : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ zu bestimmen, welcher nur von der Variablen x abhängt. Wir bezeichnen hierbei u als integrierenden Faktor, wenn die Differentialgleichung nach Multiplikation mit u exakt wird.

Aufgabe 7: (F08T1A1)
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x' = 1 + x^2 \sin(t - x) \tag{4}$$

a) Die Lösungen $x_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ von (4) zu den Anfangsbedingungen $x_k(k\pi) = 0$ lassen sich einfach angeben. Bestimmen Sie diese Lösungen.

b) Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$T_k := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : k\pi < t - x < (k + 1)\pi\}.$$

Man zeige: Liegt ein Punkt des Graphen $G_x := \{(t, x(t)) : t \in I\}$ einer Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ von (4) in T_k, so ist $G_x \subseteq T_k$.

c) Zeigen Sie: Alle maximalen Lösungen von (4) sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 8: (F11T3A2)
Sei $D := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + x^2 < 1\}$ und $\begin{array}{rcl} f : D & \to & \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto & \sqrt{1 - t^2 - x^2} \end{array}$. Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = 0$$

hat eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < 0 < b < \infty$.

b) Die Grenzwerte $\varphi(a) := \lim\limits_{t \searrow a} \varphi(t)$ und $\varphi(b) := \lim\limits_{t \nearrow b} \varphi(t)$ exitieren in $\mathbb{R}$.

c) Es gilt $-a = b$, $b^2 + (\varphi(b))^2 = 1$ und $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < b < 1$.