LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Mathematik I für Physiker: Tutoriumsblatt 14

Aufgabe T14.1 Gegeben sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 - a_2 + a_3 \\ -6a_2 + 12a_3 \\ -2a_1 + 2a_2 - 2a_3 \end{pmatrix}.$$

Gegeben seien weiterhin die Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. Bestimme $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$, falls

(a) $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$,

(b) $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3\}$ und $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$,

(c) $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Aufgabe T14.2 Betrachte die Menge

$$C := \left\{ R(a,b) := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R}).$$

(a) Berechne für $a, b \in \mathbb{R}$ das Matrixprodukt

$$R(a,b)R(a,-b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a,b) \neq (0,0)$. Zeige, dass die Matrix $R(a,b)$ eine Inverse hat und gib diese an.

(c) Zeige, dass $C \setminus \{R(0,0)\}$ eine Untergruppe von $GL(2,\mathbb{R})$ ist.

(d) Zeige, dass C ein Untervektorraum von $M_2(\mathbb{R})$ ist.

(e) Zeige, dass C ein Körper ist.

Aufgabe T14.3 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiere $A^2 = A \cdot A$ und rekursiv $A^n := A^{n-1} \cdot A$. Zeige, dass A^n für $n \in \mathbb{N}$ die Gestalt

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

besitzt.