LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Mathematik I für Physiker: Tutoriumsblatt 13

Aufgabe T13.1 Untersuche die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$.

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe T13.2 Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a, b, c, d \in \mathbb{R} : f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\}$$

der Polynome bis zum dritten Grad sowie folgende Vektoren in V:

$$v_1 = x - 1, \quad v_2 = x^2 - 1,$$
$$w_1 = x + 1, \quad w_2 = x^2 + 1, \quad w_3 = x^3, \quad w_4 = 3x.$$

Untersuche, ob die Vorraussetzungen des Basisergänzungssatzes für die Mengen $\{v_1, v_2\}$ und $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ erfüllt sind. Bestimme alle Möglichkeiten, $\{v_1, v_2\}$ mit den Vektoren aus $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ zu einer Basis von V zu ergänzen.

Aufgabe T13.3 Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und U der Untervektorraum der geraden Funktionen sowie W der Unterraum der ungeraden Funktionen. Man zeige, dass $V = U \oplus W$.

Aufgabe T13.4 Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a, b, c, d \in \mathbb{R} : f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\}$$

sowie die Abbildung

$$\varphi\colon V \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ -f(1) \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass φ linear ist und bestimme Basen von $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sowie von $\varphi(V)$.