LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Mathematik I für Physiker: Hausaufgabenblatt 9

Aufgabe H9.1 (10 Punkte):

a) Es seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{C}$, so daß die Grenzwerte $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$ und $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2$ existieren. Zeige: $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert absolut.

b) Es sei $\alpha > \frac{1}{2}$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge in $\mathbb{C}$, so daß $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$ existiert. Zeige, daß die Reihe mit den Partialsummen $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^\alpha}$ absolut konvergiert.

Aufgabe H9.2 (25 Punkte):
Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (b) $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k+1}}{5\cdot 3^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (c) $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{\binom{2+k}{k}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (d) $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(e) $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot d(k)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $d(k)$ für $k\in\mathbb{N}$ die Anzahl der Dezimalen von k angibt.

Aufgabe H9.3 (10 Punkte):

(a) Sei $n\in\mathbb{N}$ und $x\in\mathbb{C}$. Berechne

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

(b) Sei nun $x\in\mathbb{C}$ mit $|x|<1$. Zeige, dass die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} kx^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechne den Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k.$$

Aufgabe H9.4 (5 Punkte):
Bestimme, für welche $x \in \mathbb{C}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$$

konvergiert.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 09.01.2020, 10.15 Uhr vor der Vorlesung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibiliothek. Bitte einen der Namen markieren; danach wird bei der Rückgabe sortiert.

Wir wünschen allen Studenten ein gesegnetes Weihnachtsfest, erholsame Ferien und ein erfolgreiches Jahr 2020.

Aufgabe H9.5 Weihnachtsaufgabe – hier kann man das Punktekonto verbessern, die Punkte erhöhen aber nicht die geforderte Punktezahl (40 Punkte):
Entscheide in den folgenden Aufgaben, ob die verschiedenen Aussagen unter den jeweiligen Voraussetzungen richtig oder falsch sind. Setzte für „richtig“ ein Kreuz in das erste Feld, für „falsch“ ein Kreuz in das zweite Feld, und kein Kreuz falls du keine Aussage machen willst. Für jede korrekte Entscheidung gibt es einen Punkt, für jede falsche Entscheidung einen Minuspunkt. Falls keine Aussage gemacht wurde, gibt es weder Plus- noch Minuspunkt. Also

☒ ☐ für „Aussage richtig“,

☐ ☒ für „Aussage falsch“,

☐ ☐ für „keine Aussage“.

(a) Es sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ eine beliebige, nach oben beschränkte Menge.

- ☐ ☐ Es existiert in $\mathbb{R}$ das Infimum der Menge $-M := \{-x : x \in M\}$.
- ☐ ☐ Die Menge M besitzt eine obere Schranke in $\mathbb{Q}$.
- ☐ ☐ Die Menge M hat ein maximales Element.
- ☐ ☐ Falls zusätzlich $M \subset \mathbb{Q}$ gilt, so besitzt M ein Supremum $s \in \mathbb{Q}$.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

- ☐ ☐ Es gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
- ☐ ☐ Es gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn für alle $m \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n - a| < \frac{1}{m}$ für alle $n \geq N$.
- ☐ ☐ Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, so konvergiert sie in $\mathbb{R}$.
- ☐ ☐ Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, so ist sie nach oben und unten beschränkt.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

- ☐ ☐ Falls $a_1 < 0$ und falls $-\frac{100n^3+2}{n^2+1} \leq a_n \leq \frac{n^3+2}{n^2+1}a_{n-1}$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.
- ☐ ☐ Falls $a_1 < 0$ und falls $-\frac{100n^3+2}{n^2+1} \leq a_n \leq \frac{n^3+2}{n^2+1}a_{n-1}$, so besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.
- ☐ ☐ Falls $a_1 < 0$ und falls $-\frac{100n^3+2}{n^2+1} \leq a_n \leq \frac{n^3+2}{n^2+1}a_1$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.
- ☐ ☐ Falls $a_1 < 0$ und falls $-\frac{100n^3+2}{n^2+1} \leq a_n \leq \frac{n^3+2}{n^2+1}a_1$, so besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

(d) Seien $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$. Definiere $a_{2k-1} = b_k$ und $a_{2k} = c_k$ für $k \in \mathbb{N}$.

- ☐ ☐ Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.
- ☐ ☐ Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
- ☐ ☐ Falls $|b_k - c_k| > \frac{1}{k}$ für alle $k \in \ N$, so besitzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau zwei Häufungswerte.
- ☐ ☐ Falls $|b_k - c_k| < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \ N$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(e) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

- ☐ ☐ Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mehr als einen Häufungswert in $\mathbb{R}$ besitzt, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.
- ☐ ☐ Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungswert in $\mathbb{R}$ besitzt, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.
- ☐ ☐ Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mehr als einen Häufungswert in $\mathbb{R}$ besitzt, so hat die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = 2^{-a_n}$ mehr als einen Häufungswert.
- ☐ ☐ Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau zwei Häufungswerte in $\mathbb{R}$ besitzt, so hat die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = 2^{-a_n}$ genau zwei Häufungswerte.

(f) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen.

- ☐ ☐ Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{100}a_n + 100b_n$ ist konvergent.
- ☐ ☐ Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{100}a_n + 100b_n$ ist Nullfolge.
- ☐ ☐ Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, mit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{100}a_n + 100b_n$ ist konvergent.
- ☐ ☐ Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, mit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = a_n b_n$ ist konvergent.

(g) Sei $M \subset \mathbb{R}$ abzählbar unendlich.

- ☐ ☐ Dann ist die Menge $M_1 := \{a \in M : |a| \leq 100\}$ höchstens abzählbar unendlich.
- ☐ ☐ Dann ist die Menge $\mathcal{P}(M)$ höchstens abzählbar unendlich.
- ☐ ☐ Dann ist die Menge $M_2 := \{j \cdot a : j \in \mathbb{N}, a \in M\}$ höchstens abzählbar unendlich.
- ☐ ☐ Dann ist die Menge $M_3 := \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \inf(M) < x < \sup(M)\}$ höchstens abzählbar unendlich.

(h) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = c_n \cdot 2^{-n}$ mit $c_n \in \{1, 2, 3\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$..

- ☐ ☐ Dann ist die Reihe genau dann konvergent, wenn $c_n \in \{1, 2\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- ☐ ☐ Dann ist die Reihe konvergent, wenn $c_n \in \{1, 2\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- ☐ ☐ Dann ist die Reihe nicht konvergent in $\mathbb{R}$.
- ☐ ☐ Dann ist die Reihe konvergent in $\mathbb{R}$.

(i) Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und seien $M_1, M_2 \subseteq M$ und $N_1, N_2 \subseteq N$ Teilmengen. Dann gilt:

- ☐ ☐ $f(M_1 \cup M_2) \subseteq f(M_1) \cup f(M_2)$.
- ☐ ☐ $f(M_1 \cup M_2) \supseteq f(M_1) \cup f(M_2)$.
- ☐ ☐ $f(M_1 \cap M_2) \supseteq f(M_1) \cap f(M_2)$.
- ☐ ☐ $f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2)$.

(j) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:

- ☐ ☐ Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt.
- ☐ ☐ Zu jedem $a \in G$ gibt es ein eindeutig bestimmtes inverses Element.
- ☐ ☐ Für $a, b \in G$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
- ☐ ☐ Für $a, e \in G$ und e bezeichnet das neutrale Element gilt $a \cdot e = e \cdot a$.