

Mathematik I für Physiker: Hausaufgabenblatt 8

Aufgabe H8.1 (10 Punkte):

Gegeben sei die Folge $(a_k)_{k \geq 2}$ mit $a_k := \frac{4k}{(k^2-1)^2}$

(a) Sei $n \geq 2$. Zeige

$$\sum_{k=2}^n a_k = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right).$$

(b) Untersuche die Reihe $\left(\sum_{k=2}^n a_k \right)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe H8.2 (10 Punkte):

Bestimme in $\widehat{\mathbb{R}}$ die Grenzwerte der folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei

$$a_n := n^3 + n, \quad b_n := \sqrt[n]{(n+1)!}, \quad c_n := \sqrt[3]{n^3 + 2}, \quad d_n := \frac{n^2 + n}{\sqrt[n]{(n+1)!}}.$$

Untersuche außerdem die Folge $(a_n - c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz in $\widehat{\mathbb{R}}$.

Aufgabe H8.3 (10 Punkte):

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Zeige:

(a) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, so gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = y - \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

(b) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, so gilt

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = -\infty.$$

Aufgabe H8.4 (10 Punkte):

Es sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ und

$$X := \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1, \dots, b-1\}^{\mathbb{N}} : \nexists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N : x_k = b-1 \right\}.$$

Zeige, dass

$$f: X \rightarrow [0, 1[$$
$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto x := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{b^k}$$

bijektiv ist.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 19.12.2019, 10.15 Uhr vor der Vorlesung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibliothek. Bitte einen der Namen markieren; danach wird bei der Rückgabe sortiert.