LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Analysis einer Variablen (LAG): Hausaufgabenblatt 7

Aufgabe H7.1 (10 Punkte):
Untersuche die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, wobei

$$a_n := \frac{2n+5}{7n+3i}, \qquad b_n := \frac{3+2n}{\sqrt{3}+\sqrt{2n}} + in, \qquad c_n := \frac{(-2)^n}{3^{2n}},$$
$$d_n := \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}, \qquad e_n := i^{3n}, \qquad f_n := \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Aufgabe H7.2 (10 Punkte):
Gegeben sei $a_1 \in \mathbb{R}$ und die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_{n+1} := \frac{a_n^2+3}{4}.$$

Zeige, dass

(a) die Folge, unabhängig von a_1, höchstens die Grenzwerte 1 und 3 besitzen kann,

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ für $|a_1| < 3$,

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ für $|a_1| = 3$,

(d) die Folge für $|a_1| > 3$ divergiert.

Aufgabe H7.3 (10 Punkte):
Es sei $a := i\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$. Berechne alle Häufungswerte der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := a^n + \left(\frac{i}{4}\right)^n = \left(i\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\right)^n + \left(\frac{i}{4}\right)^n.$$

Aufgabe H7.4 (10 Punkte):

(a) Zeige, dass die Folge $\left(\sqrt[n]{\frac{3n^2-n+7}{n!}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechne den Grenzwert.

(b) Sei $a, b > 0$. Zeige, dass die Folge $(\sqrt[n]{a^n+b^n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}$$

besitzt.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 05.12.2019, 10.15 Uhr vor der Übung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibiliothek. Bitte einen der Namen markieren; danach wird bei der Rückgabe sortiert.