

Mathematik I für Physiker: Hausaufgabenblatt 6

Aufgabe H6.1 (10 Punkte):

- (a) (i) Bestimme $\operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(z)$ für $z = \frac{(7-3i)^2}{5-i} \in \mathbb{C}$.
(ii) Bestimme $\operatorname{Im}(z)$ und $\operatorname{Im}(w)$ für $z = |\sqrt{2} + 3i|^2$ und $w = (\sqrt{2} + 3i)^2$.
- (b) Seien $\eta, \zeta \in \mathbb{C}$. Zeige, dass

$$\zeta\bar{\zeta} + \eta\bar{\eta} = \frac{1}{2} ((\zeta + \eta)(\overline{\zeta + \eta}) + (\zeta - \eta)(\overline{\zeta - \eta})).$$

- (c) Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = \sqrt{a\bar{a}} < 1$. Skizziere

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \right| \leq 1 \right\}$$

in der komplexen Ebene. *Hinweis: Zeige zunächst $|1 - z\bar{a}|^2 - |z - a|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |a|^2)$ und folgere daraus eine a -unabhängige Darstellung von M .*

Aufgabe H6.2 (10 Punkte):

- (a) Zeige, dass die folgenden Abbildungen $d_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2\}$ Metriken auf \mathbb{R}^2 bilden. Für $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sei
- (i) $d_1(\vec{x}, \vec{y}) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$,
- (ii) $d_2(\vec{x}, \vec{y}) := \begin{cases} d_1(\vec{x}, \vec{y}) & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{x} = \lambda\vec{y}, \\ d_1(\vec{x}, \vec{0}) + d_1(\vec{y}, \vec{0}) & \text{sonst.} \end{cases}$
- (b) Zeichne die Einheitssphäre, also die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : d_i(\vec{x}, \vec{0}) = 1\}$, für $i \in \{1, 2\}$ (wobei $\vec{0} = (0, 0)$).

Aufgabe H6.3 (10 Punkte):

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X .

- (a) Zeige: Sind die Teilfolgen $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_{5n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, dann konvergiert auch $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) Gib ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} an, sodass für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ die Teilfolgen $(x_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren, aber $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

Aufgabe H6.4 (20 Punkte):

Es sei $\emptyset \neq X$ eine Menge und

$$B(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist Funktion und } f(X) \subseteq \mathbb{R} \text{ ist beschränkt}\}.$$

(a) Zeige, dass

$$\begin{aligned} d : B(X) \times B(X) &\rightarrow [0, \infty[, \\ (f, g) &\mapsto d(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\} \end{aligned}$$

eine Metrik auf $B(X)$ definiert.

(b) Betrachte nun den Fall $X = \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} \end{aligned}$$

Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n \in B(\mathbb{R})$, für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die reelle Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, aber $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht in $(B(\mathbb{R}), d)$.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 28.11.2019, 10.15 Uhr vor der Vorlesung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibliothek. Bitte einen der Namen markieren; danach wird bei der Rückgabe sortiert.