LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Mathematik I für Physiker: Hausaufgabenblatt 4

Aufgabe H4.1 (10 Punkte):
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Weiter bezeichne für ein $j \in \{1, ..., n\}$ mit $|A_j|$ die Zahl der Elemente von A_j. Zeige, dass

$$\left| \bigcup_{j=1}^{n} A_j \right| = \sum_{I \in \mathcal{P}(\{1,...,n\}) \setminus \{\emptyset\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{j \in I} A_j \right|$$

gilt.

Aufgabe H4.2 (10 Punkte):

(a) Zeige, dass $3^{2n} + 7$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar ist.

(b) Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion, die $f(xy) = f(x) + f(y)$ für jedes $x, y \in \mathbb{N}$ erfüllt. Zeige $f(m^n) = nf(m)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe H4.3 (15 Punkte):
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $n! := \prod_{j=1}^{n} j$, ferner $0! := 1$ und zu $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, ..., n\}$ sei $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, ..., n\}$. Zeige, dass

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

(b) Seien $m, n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zeige, dass

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{m}.$$

(c) Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins 1. Für $x \in R$ setze $x^0 := 1$ und $x^n := \underbrace{x \cdots x}_{n-mal}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Zeige, dass für alle $x, y \in R$ mit $xy = yx$ und $n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

gilt.

Aufgabe H4.4 (15 Punkte):
Es sei X eine abzählbare Menge. Zeige:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist X^n und die Menge

$$\mathcal{E}_n(X) := \{Y \subseteq X : \mathrm{Kard}(Y) \leq n\}$$

aller Teilmengen von X mit höchstens n Elementen abzählbar.

b) Die Menge

$$\mathcal{E}(X) := \{Y \subseteq X : Y \text{ ist endlich}\}$$

aller endlichen Teilmengen von X ist abzählbar.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 14.11.2019, 10.15 Uhr vor der Vorlesung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibiliothek. Bitte einen der Namen markieren; danach wird bei der Rückgabe sortiert.