LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Mathematik I für Physiker
Ferienblatt

Aufgabe H13.1 (10 Punkte):

Es sei die Abbildung $\begin{array}{rcl} F_A : \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ \underline{x} & \longmapsto & A\underline{x} \end{array}$ mit $A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ -4 & -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Zeige: Die Vektoren $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^5$.

b) Berechne die darstellende Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F_A)$ der Abbildung F_A bezüglich der Basis $\mathcal{B}$..

Aufgabe H13.2 (10 Punkte):
Hat das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & b_1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 & = & b_2 \\ x_1 - x_2 & = & b_3 \end{array} \right.$$

für beliebig gewähltes $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ eine eindeutige Lösung? Wenn ja, so gib diese in Abhängigkeit von (b_1, b_2, b_3) an.

Aufgabe H13.3 (10 Punkte):
Sei

$$\mathcal{P}_n := \left\{ \begin{array}{rcl} p : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \end{array} : a_n, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

der $n+1$ dimensionale Raum aller reellen Polynomfunktionen vom Grad kleiner gleich n und für $j \in \{0, 1, ..., n\}$ sei $\begin{array}{rcl} X^j : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^j \end{array}$. Definiere

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{P}_n & \longrightarrow & \mathcal{P}_{n-1} \\ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k \end{array}$$

a) Zeige: Φ ist $\mathbb{R}$-linear.

b) Berechne die darstellende Matrix von Φ bezüglich der Basen $\mathcal{A}_n := (1, X, \cdots, X^n)$ und $\mathcal{A}_{n-1} := (1, X, \cdots, X^{n-1})$.

c) Zeige: Die Menge $\mathcal{B}_n := \left\{1;\ 1+X;\ 1+X+X^2; ...; \sum_{i=0}^{n} X^i\right\}$ bildet eine Basis von $\mathcal{P}_n$.

d) Berechne die darstellende Matrix $M_{\mathcal{A}_{n-1}}^{\mathcal{B}_n}(\Phi)$ von Φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}_n$ und $\mathcal{A}_{n-1}$.

Aufgabe H13.4 (10 Punkte):

Schreibe $\begin{array}{rcl} f: \mathbb{C}\backslash\{0,1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z+1}{z^2(z-1)} \end{array}$ als Potenzreihe um den Entwicklungspunkt -1 und bestimme den Konvergenzradius. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert diese Potenzreihe?

Aufgabe H13.5 (10 Punkte):

Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\dim_K(W) = n-1$. Zeige: Es gibt eine K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow K$ mit $\mathrm{Kern}(f) = W$. Gilt diese Aussage auch für $1 \leq \dim_K(W) \leq n-2$?

Aufgabe H13.6 (10 Punkte):

Berechne den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n z^{n!}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\exp\left(\frac{2\pi}{3} ni\right)\right) z^n$.

Abgabe (für alle, die noch Übungspunkte zum Wintersemester benötigen) je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Dienstag 20.4.2020, 8.15 Uhr vor der Vorlesung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibiliothek