LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Mathematik I für Physiker
Hausaufgabenblatt 12

Aufgabe H12.1 (10 Punkte):
Es seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

a) Sei $f\colon V \to V$ eine K-lineare Abbildung mit der Eigenschaft $f = f \circ f$. Zeige, dass $V = f(V) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ gilt.

b) Seien U und W zwei Untervektorräume von V mit $V = U \oplus W$. Zeige, dass es eine K-lineare Abbildung $f\colon V \to V$ mit $f = f \circ f$ gibt, sodass $U = f(V)$ und $W = \mathrm{Ker}(f)$.

Aufgabe H12.2 (10 Punkte):
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektoraum und $f\colon V \to V$ eine K-lineare Funktion. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist injektiv,

(b) f ist surjektiv,

(c) f ist bijektiv,

(d) Es gibt ein K-lineares $g\colon V \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_V$,

(e) Es gibt ein K-lineares $h\colon V \to V$ mit $h \circ f = \mathrm{id}_V$.

Aufgabe H12.3 (5 Punkte):
Sei

$$V := \big\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a, b, c, d \in \mathbb{R} : f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \big\}$$

der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens 3 mit reellen Koeffizienten. Die Polynome

$$f_1(x) = 24x^2 - 6x + 44, \quad f_2(x) = (x-1)^3, \quad f_3(x) = (x+2)^3, \quad f_4(x) = (x-3)^3$$

spannen einen Unterraum $U \subseteq V$ auf. Bestimme die Dimension von U.

Aufgabe H12.4 (15 Punkte):

(a) Betrachte den Vektorraum $U = \mathbb{R}^3$ und darin die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei weiter $V = \mathrm{lin}\{v_1, v_2, v_3\}, W = \mathrm{lin}\{w_1, w_2, w_3\}$. Bestimme explizit die Menge

$$A = \big\{ f : V \to W : f \text{ ist } K\text{−linear und } f(v_i) = w_i \text{ für } i \in \{1,2,3\} \big\}.$$

(b) Betrachte den Vektorraum $U = \mathbb{R}^3$ und darin die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei weiter $V = \mathrm{lin}\{v_1, v_2, v_3\}, W = \mathrm{lin}\{w_1, w_2, w_3\}$. Bestimme, wie in Teilaufgabe (a), die Menge A.

(c) Betrachte den Vektorraum $U = \mathbb{R}^3$ und darin die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei weiter $V = \mathrm{lin}\{v_1, v_2\}, W = \mathrm{lin}\{w_1, w_2, w_3\}$. Bestimme

$$A = \big\{ f : V \to W : f \text{ ist } K\text{−linear und } f(v_i) = w_i \text{ für } i \in \{1, 2\} \big\}.$$

Aufgabe H12.5 (10 Punkte):
Betrachte den Vektorraum $U = \mathbb{R}^3$ und darin

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle x, v \rangle = 0\},$$

wobei mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ gemeint ist.

(a) Zeige, dass V einen Untervektorraum bildet.

(b) Berechne $\dim_{\mathbb{R}}(V)$.

(c) Bestimme eine Basis von V und ergänze diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 30.01.2020, 10.15 Uhr vor der Vorlesung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibiliothek