

Mathematik I für Physiker: Hausaufgabenblatt 1

Aufgabe H1.1 Es seien X und Y zwei nichtleere, disjunkte Mengen (also $X \neq \emptyset \neq Y$ und $X \cap Y = \emptyset$). Definiere

$$f: \mathcal{P}(X)^2 \times \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)^2 \times \mathcal{P}(X \cup Y), \\ (A, B, C) \mapsto ((X \setminus A) \cap B, (X \setminus B) \cap A, (A \cap B) \cup C).$$

Zeige, dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe H1.2 Sei M die Menge aller Mordverdächtiger. Es ist also „ $\forall x \in M$ “ als „für alle Mordverdächtige x “ zu lesen, und weiter „ k “ als „der Koch“, „ p “ als „die Putzkraft“, „ s “ als „die Stiefmutter“, „ $K(x, y)$ “ als „ x hat y ermordet“, „ $A(x, y)$ “ als „ x hat Angst vor y “ und „ $H(x, y)$ “ als „ x hasst y “. Formuliere folgende Aussagen in Quantorenschreibweise.

- Der Koch oder die Putzkraft hat die Stiefmutter umgebracht, oder die Stiefmutter hat Selbstmord begangen.
- Man mordet nur die, die man hasst und von denen man Angst hat.
- Diejenigen, die die Stiefmutter hasst, mag die Putzkraft.
- Diejenigen, die die Stiefmutter hasst, hasst auch der Koch.
- Die Stiefmutter hasst sich selbst und sie hasst die Putzkraft.
- Der Koch hasst alle, die Angst vor der Stiefmutter haben.
- Jeder mag die Stiefmutter oder den Koch oder die Putzkraft.

Nimm nun diese Informationen als gegeben an und ermittle durch eine möglichst detaillierte logische Argumentation den Mörder der Stiefmutter.

Aufgabe H1.3 Zeige oder widerlege, dass für alle Mengen A, B gilt:

- $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$,
- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Aufgabe H1.4

- Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
 - $h: X \rightarrow Y$ ist injektiv,
 - für alle Mengen Z und Funktionen $f: Z \rightarrow X, g: Z \rightarrow X$ gilt: Ist $h \circ f = h \circ g$, so folgt $f = g$.
- Finde eine Aussage $A(f, g, h)$ und ergänze die „?“ , sodass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
 - $h: X \rightarrow Y$ ist surjektiv,
 - für alle Mengen Z und Funktionen $f: „?\" \rightarrow „?\", g: „?\" \rightarrow „?\"$ gilt: Ist $A(f, g, h)$, so folgt $f = g$.

Zeige die resultierende Aussage.

Abgabe je Zweier- oder Dreiergruppe eine Lösung; bis Donnerstag 24.10.2019 10.15 Uhr vor der Übung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibliothek.