LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Analysis einer Variablen (LAG): Tutoriumsblatt 8

Aufgabe T8.1 Untersuche die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz in $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ bzw. $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$, wobei

$$a_n := \Big(\frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\Big)^n + \Big(\frac{5n + \sqrt{2}i}{n+2}\Big), \qquad b_n := \begin{pmatrix} 2^{-n} \\ n^{-2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $\|(x,y,z)\|_2 := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Aufgabe T8.2 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}^n$ mit $(\vec{x}_k) = ((x_k)_1, \dots, (x_k)_n)$. Zeige: Wenn $|(x_k)_j - (x_{k+1})_j| \leq 2^{-k}$ für alle $j = 1, \dots, n$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt, so ist $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Raum $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$.

Aufgabe T8.3 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert a, so konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $\sqrt{a}$.

Aufgabe T8.4 Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto x^2 - 6x + 5 \quad \text{und} \\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto \frac{9x}{10}. \end{aligned}$$

Bestimme die Bilder $h(A)$ und die Urbilder $h^{-1}(B)$ für die Mengen und Funktionen in der Tabelle:

h	A	B
f	$]0,1[$	$\{0,5\} = \{0\} \cup \{5\}$
g	$[-5,5]$	$\{0,2\} = \{0\} \cup \{2\}$
$g \circ f$	$]-1,1]$	$\{1\}$

Aufgabe T8.5

(a) Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f\colon U \to V$ eine streng monotone Funktion. Zeige, dass f injektiv ist.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben mit $f(x) = x^2$. Zeige, dass f bijektiv ist.