LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Analysis einer Variablen (LAG): Tutoriumsblatt 3

Aufgabe T3.1
Behauptung: Alle Physikstudenten haben am gleichen Tag Geburtstag.

Beweis. Wir zeigen durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass in einer Gruppe von n Studenten alle am gleichen Tag Geburtstag haben.
Induktionsanfang (n=1): In einer Gruppe, die aus einem Studenten besteht, haben alle am gleichen Tag Geburtstag.
Induktionsschritt: Angenommen, in jeder Gruppe von n Studenten haben alle am gleichen Tag Geburtstag. Sei $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ eine Gruppe von $n+1$ Studenten. Nach Induktionsvoraussetzung haben $x_2, \ldots, x_{n+1}$ am gleichen Tag Geburtstag. Es haben aber auch $x_1, \ldots, x_n$ am gleichen Tag Geburtstag. Also hat x_1 am gleichen Tag Geburstag wie $x_2, \ldots, x_{n+1}$. Damit haben $x_1, \ldots, x_{n+1}$ am gleichen Tag Geburtstag und die Behauptung ist für $n+1$ bewiesen. □

Offenbar ist die Behauptung falsch. Wo liegt das Problem in diesem Beweis?

Aufgabe T3.2
(a) Zeige mittels vollständiger Induktion,dass

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} i$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.
(b) Bestimme alle $n \in \mathbb{N}$, für die gilt, dass

$$7n + 3 \leq 2^n.$$

Aufgabe T3.3 Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Menge, für die $\inf(A)$ exostiert. Wir definieren

$$-A := \{-a : a \in A\}.$$

Beweise, dass

$$-\inf(A) = \sup(-A).$$

Aufgabe T3.4 Die Fibonacci-Folge ist definiert als $f_1 := 1 =: f_2$ sowie $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Zeige, dass

$$f_n = \frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}}, \qquad \text{wobei } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und } \Psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$