

Analysis einer Variablen (LAG): Tutoriumsblatt 13

Aufgabe T13.1 Untersuche die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^2 .

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^3 .

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^4 .

Aufgabe T13.2 Gegeben sei der \mathbb{R} -Vektorraum

$$V := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists a, b, c, d \in \mathbb{R} : f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\}$$

der Polynome bis zum dritten Grad sowie folgende Vektoren in V :

$$\begin{aligned} v_1 &= x - 1, & v_2 &= x^2 - 1, \\ w_1 &= x + 1, & w_2 &= x^2 + 1, & w_3 &= x^3, & w_4 &= 3x. \end{aligned}$$

Untersuche, ob die Voraussetzungen des Basisergänzungssatzes für die Mengen $\{v_1, v_2\}$ und $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ erfüllt sind. Bestimme alle Möglichkeiten, $\{v_1, v_2\}$ mit den Vektoren aus $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ zu einer Basis von V zu ergänzen.

Aufgabe T13.3 Sei $V = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und U der Untervektorraum der geraden Funktionen sowie W der Unterraum der ungeraden Funktionen. Man zeige, dass $V = U \oplus W$.

Aufgabe T13.4 Gegeben sei der \mathbb{R} -Vektorraum

$$V := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists a, b, c, d \in \mathbb{R} : f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\}$$

sowie die Abbildung

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ -f(1) \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass φ linear ist und bestimme Basen von $\text{Ker}(\varphi)$ sowie von $\varphi(V)$.