LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Analysis einer Variablen (LAG): Hausaufgabenblatt 8

Aufgabe H8.1 (10 Punkte):
Gegeben sei die Folge $(a_k)_{k\geq 2}$ mit $a_k := \frac{4k}{(k^2-1)^2}$

(a) Sei $n \geq 2$. Zeige

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \frac{5}{4} - \Big(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\Big).$$

(b) Untersuche die Reihe $\left(\sum_{k=2}^{n} a_k\right)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq 2}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe H8.2 (10 Punkte):
Bestimme in $\widehat{\mathbb{R}}$ die Grenzwerte der folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$a_n := n^3 + n, \qquad b_n := \sqrt[n]{(n+1)!}, \qquad c_n := \sqrt[3]{n^3+2}, \qquad d_n := \frac{n^2+n}{\sqrt[n]{(n+1)!}}.$$

Untersuche außerdem die Folge $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz in $\widehat{\mathbb{R}}$.

Aufgabe H8.3 (10 Punkte):
Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Zeige:

(a) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, so gilt

$$\liminf_{n\to\infty}(y_n - x_n) = y - \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

(b) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, so gilt

$$\varliminf_{n\to\infty}(y_n - x_n) = -\infty.$$

Aufgabe H8.4 (10 Punkte):
Es sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ und

$$X := \Big\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,1,\dots,b-1\}^{\mathbb{N}} : \nexists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N : x_k = b-1\Big\}.$$

Zeige, dass

$$f\colon X \to [0,1[$$
$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto x := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k}$$

bijektiv ist.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 19.12.2019, 10.15 Uhr vor der Übung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibiliothek. Bitte einen der Namen markieren; danach wird bei der Rückgabe sortiert.