LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Analysis einer Variablen (LAG): Hausaufgabenblatt 6

Aufgabe H6.1 (10 Punkte):

(a) (i) Bestimme $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ für $z = \frac{(7-3i)^2}{5-i} \in \mathbb{C}$.

(ii) Bestimme $\mathrm{Im}(z)$ und $\mathrm{Im}(w)$ für $z = |\sqrt{2}+3i|^2$ und $w = (\sqrt{2}+3i)^2$.

(b) Seien $\eta, \zeta \in \mathbb{C}$. Zeige, dass

$$\zeta\overline{\zeta} + \eta\overline{\eta} = \frac{1}{2}\left((\zeta+\eta)(\overline{\zeta+\eta}) + (\zeta-\eta)(\overline{\zeta-\eta})\right).$$

(c) Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = \sqrt{a\overline{a}} < 1$. Skizziere

$$M := \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\right| \leq 1\right\}$$

in der komplexen Ebene. *Hinweis: Zeige zunächst* $|1-z\overline{a}|^2 - |z-a|^2 = (1-|z|^2)(1-|a|^2)$ *und folgere daraus eine a-unabhängige Darstellung von M.*

Aufgabe H6.2 (10 Punkte):

(a) Zeige, dass die folgenden Abbildungen $d_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ für $i \in \{1,2\}$ Metriken auf $\mathbb{R}^2$ bilden. Für $\vec{x} = (x_1, x_2),\ \vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sei

(i) $d_1(\vec{x}, \vec{y}) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$,

(ii) $d_2(\vec{x}, \vec{y}) := \begin{cases} d_1(\vec{x}, \vec{y}) & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{x} = \lambda\vec{y}, \\ d_1(\vec{x}, \vec{0}) + d_1(\vec{y}, \vec{0}) & \text{sonst.} \end{cases}$

(b) Zeichne die Einheitssphäre, also die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 :\ d_i(\vec{x}, \vec{0}) = 1\}$, für $i \in \{1,2\}$ (wobei $\vec{0} = (0,0)$.

Aufgabe H6.3 (10 Punkte):
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X.

(a) Zeige: Sind die Teilfolgen $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Gib ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ an, sodass für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ die Teilfolgen $(x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, aber $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

Aufgabe H6.4 (20 Punkte):
Es sei $\emptyset \neq X$ eine Menge und

$$B(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ ist Funktion und } f(X) \subseteq \mathbb{R} \text{ ist beschränkt}\}.$$

(a) Zeige, dass

$$\begin{aligned} d : B(X) \times B(X) &\to [0, \infty[, \\ (f, g) &\mapsto d(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\} \end{aligned}$$

eine Metrik auf $B(X)$ definiert.

(b) Betrachte nun den Fall $X = \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} \end{aligned}$$

Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n \in B(\mathbb{R})$, für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die reelle Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, aber $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht in $(B(\mathbb{R}), d)$.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 28.11.2019, 10.15 Uhr vor der Übung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibiliothek. Bitte einen der Namen markieren; danach wird bei der Rückgabe sortiert.