

## Analysis einer Variablen (LAG): Hausaufgabenblatt 4

### Aufgabe H4.1 (10 Punkte):

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und es seien  $A_1, \dots, A_n$  endliche Mengen. Weiter bezeichne für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $|A_j|$  die Zahl der Elemente von  $A_j$ . Zeige, dass

$$\left| \bigcup_{j=1}^n A_j \right| = \sum_{I \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) \setminus \{\emptyset\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{j \in I} A_j \right|$$

gilt.

### Aufgabe H4.2 (10 Punkte):

- (a) Zeige, dass  $3^{2n} + 7$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  durch 8 teilbar ist.
- (b) Es sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine Funktion, die  $f(xy) = f(x) + f(y)$  für jedes  $x, y \in \mathbb{N}$  erfüllt. Zeige  $f(m^n) = nf(m)$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ .

### Aufgabe H4.3 (15 Punkte):

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $n! := \prod_{j=1}^n j$ , ferner  $0! := 1$  und zu  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  sei  $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- (a) Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Zeige, dass

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

- (b) Seien  $m, n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Zeige, dass

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{m}.$$

- (c) Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring mit Eins 1. Für  $x \in R$  setze  $x^0 := 1$  und  $x^n := \underbrace{x \cdots x}_{n\text{-mal}}$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

Zeige, dass für alle  $x, y \in R$  mit  $xy = yx$  und  $n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

gilt.

**Aufgabe H4.4 (15 Punkte):**

Es sei  $X$  eine abzählbare Menge. Zeige:

- a) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $X^n$  und die Menge

$$\mathcal{E}_n(X) := \{Y \subseteq X : \text{Kard}(Y) \leq n\}$$

aller Teilmengen von  $X$  mit höchstens  $n$  Elementen abzählbar.

- b) Die Menge

$$\mathcal{E}(X) := \{Y \subseteq X : Y \text{ ist endlich}\}$$

aller endlichen Teilmengen von  $X$  ist abzählbar.

**Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 14.11.2019, 10.15 Uhr vor der Übung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibliothek. Bitte einen der Namen markieren; danach wird bei der Rückgabe sortiert.**