LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Analysis einer Variablen (LAG): Hausaufgabenblatt 3

Aufgabe H3.1 (15 Punkte):
Auf einer kleinen Insel lebte einst ein Volk vollkommen rational denkender Logiker, dessen Angehörige allesamt entweder blaue oder braune Augen besaßen. Die Logiker folgten eisern einem Kodex. Teil davon war die Regel, dass niemandem die eigene Augenfarbe verraten werden dürfte. Des Weiteren gab es auf der Insel keinerlei andere Möglichkeit für die Insulaner, ihre eigene Augenfarbe herauszufinden.
Jeden Mittag traf sich die gesamte Inselbevölkerung zum Mittagessen. Insbesondere kannte also jeder Insulaner die Augenfarbe aller anderen Inselbewohner (jedoch nicht seine eigene). Jeden Abend besuchte ein Fährmann mit seinem Schiff die Insel. Konnte man dem Fährmann die eigene Augenfarbe nennen, so durfte man mit ihm die Nachbarinsel besuchen. Auf dieser Nachbarinsel lebten angewandte Mathematiker, für deren Lebensweise die Logiker lebhaftes Interesse hegten.
Eines Tages tauchte ein Fremder zum Mittagessen auf der Insel auf und sprach „Ich sehe jemanden mit blauen Augen“, bevor er wieder verschwand. Diese Aussage genügte, dass die Insulaner nach gewisser Zeit allesamt die Insel der angewandten Mathematiker besuchen konnten. Wie lässt sich dies erklären? Unter der Annahme, dass $n \in \mathbb{N}$ Logiker auf der Insel lebten und k davon blaue Augen besaßen, wie viele Nächte waren seit Auftauchen des Fremden vergangen, bis alle Insulaner die Nachbarinsel besuchen konnten?
(Es darf davon ausgegangen werden, dass zur Zeit obiger Geschichte niemand sonst auf der Logiker-Insel lebte, dass niemand geboren wurde und niemand starb.)

Aufgabe H3.2 (10 Punkte):
Es sei $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{1\}$ die Nachfolgerabbildung aus den Peano-Axiomen und $m \in \mathbb{N}$. Dazu seien $\varphi_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $\psi_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktionen, die laut Rekursionssatz durch $\varphi_m(1) = m + 1$ und $\varphi_m \circ N = N \circ \varphi_m$ btw. $\psi_m(1) = m$ und $\psi_m \circ N = \varphi_m \circ \psi_m$ gegeben sind. Zeige:

a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\psi_1(m) = m$.

b) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $\psi_{n+1}(m) = \psi_n(m) + m$.

c) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $m \cdot n = n \cdot m$.

Hinweis: Bei dieser Aufgabe darf $n + m = m + n$ für $n, m \in \mathbb{N}$ verwendet werden.

Aufgabe H3.3 (10 Punkte):
Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere Mengen, für die $\sup(A)$ und $\sup(B)$ existieren. Sei des Weiteren $c \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Mengen

$$C := \{ca : a \in A\} \qquad \text{sowie} \qquad A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

(a) Zeige: Ist $c > 0$, so besitzt C ein Supremum und es gilt $\sup(C) = c \sup(A)$. Ist $c < 0$, so besitzt C ein Infimum und es gilt $\inf(C) = c \sup(A)$.

(b) Zeige, dass $A+B$ ein Supremum besitzt und dass $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Aufgabe H3.4 (10 Punkte):
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ sei $a_k \in [-1, 0] \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 07.11.2019, 10.15 Uhr vor der Übung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibiliothek. Bitte einen der Namen markieren; danach wird bei der Rückgabe sortiert.