LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Analysis einer Variablen (LAG): Hausaufgabenblatt 2

Aufgabe H2.1 (10 Punkte):
Es seien folgende Funktionen gegeben:

$$\begin{aligned}
&f\colon \{1,2,3\} \to \mathbb{N}, f(1)=1, f(2)=3, f(3)=2,\\
&g\colon \mathbb{N} \to \{-1,+1\}, n \mapsto (-1)^n,\\
&h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0, n \mapsto n^2-1.
\end{aligned}$$

(a) Untersuche die Funktionen f, g und h auf Injektivität und Surjektivität und gib, wenn möglich, eine Rechtsinverse (für h also eine Funktion $r : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ mit $h \circ r = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$) oder eine Linksinverse (für h also eine Funktion $l : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ mit $l \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$) an.

(b) Gib – sofern möglich – Teilmengen der Definitionsbereiche bzw. Wertevorräte von f, g und h an, sodass die mit diesen neuen Definitionsbereichen und Wertevorräten definierten Funktionen bijektiv sind.

Aufgabe H2.2 (15 Punkte):
Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen den Mengen X und Y. Zeige:

(a) Für alle $V \subseteq X$ und $W \subseteq Y$ gilt $f(f^{-1}(W)) \subseteq W$ und $V \subseteq f^{-1}(f(V))$.

(b) Es ist f genau dann injektiv, wenn $f^{-1}(f(V)) = V$ für jedes $V \subseteq X$ gilt.

(c) Es ist f genau dann bijektiv, wenn für beliebige Teilmengen $A, B, C \subseteq X$

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \qquad \text{und} \qquad Y \setminus f(C) \subseteq f(X \setminus C)$$

gilt.

Aufgabe H2.3 (10 Punkte):
Es seien A, B und C nichtleere Mengen mit Totalordnungen $\prec_A$, $\prec_B$ und $\prec_C$, sowie $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) Ist f streng monoton fallend und g streng monoton steigend, so ist $g \circ f$ streng monoton fallend.

(b) Sind f und g monoton steigend, so ist $g \circ f$ streng monton steigend.

(c) Ist f monoton steigend und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

Aufgabe H2.4 (15 Punkte):
Gegeben sei die Indexmenge $I \neq \emptyset$ und für alle $i \in I$ seien die Mengen $X_i, Y_i \neq \emptyset$ sowie die Abbildungen $\begin{aligned} f_i : X_i &\to Y_i \\ x_i &\mapsto f_i(x_i) \end{aligned}$ gegeben. Betrachtet wird die Abbildung

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} X_i &\longrightarrow \textstyle\prod_{i \in I} Y_i, \\ (x_i)_{i \in I} &\mapsto (f_i(x_i))_{i \in I}. \end{aligned}$$

Beweise folgende Aussagen:

(a) Es ist $\displaystyle\prod_{i \in I} f_i$ injektiv genau dann wenn f_i für jedes $i \in I$ injektiv ist.

(b) Es ist $\displaystyle\prod_{i \in I} f_i$ surjektiv genau dann wenn f_i für jedes $i \in I$ surjektiv ist.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 31.10.2019, 10.15 Uhr vor der Übung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibiliothek. Bitte einen der Namen markieren; danach wird bei der Rückgabe sortiert.