LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Analysis einer Variablen (LAG): Hausaufgabenblatt 11

Aufgabe H11.1 (10 Punkte):
Es sei $\emptyset \neq I$ eine Menge und $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{C}-$Vektorraum mit Skalarprodukt. Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\cdot\rangle_{l^2} : l^2(I;X) \times l^2(I;X) & \to & \mathbb{C} \\ ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) & \mapsto & \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle \end{array}$$

ein Skalarprodukt auf

$$l^2(I;X) := \{x : I \to X : (\|x_i\|^2)_{i\in I} \text{ ist absolut summierbar}\}$$

definiert.

Aufgabe H11.2 (15 Punkte):

Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und für $y \in \mathbb{C}$ mit $|y| < r$ sei $f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ Grenzwert einer Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.

(a) Sei $s < r$. Zeige: Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$, sodass für alle y mit $|y| \le s$ gilt:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k - \sum_{k=0}^{K} a_k y^k \right| \le \varepsilon.$$

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < r$. Zeige:

$$f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Aufgabe H11.3 (5 Punkte):
$\mathbb{R}$ ist sowohl ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$, wie auch über dem Körper $\mathbb{Q}$. Zeige, daß die Vektoren $1 \in \mathbb{R}$ und $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

- linear abhängig sind, wenn man $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffaßt
- linear unabhängig sind, wenn man $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auffaßt.

Aufgabe H11.4 (10 Punkte):
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Es sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Welche $x \in V$ haben die Eigenschaft, dass $\{b_1, \dots b_n, x\} \setminus \{b_i\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Basis von V ist?

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 23.01.2020, 10.15 Uhr vor der Übung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibiliothek