LMU München
Mathematisches Institut
WiSe 2019/20

PD Dr. Heribert Zenk
M. Feistl, K. Matzke

Analysis einer Variablen (LAG): Hausaufgabenblatt 10

Aufgabe H10.1 (10 Punkte):
Bestimme, für welche $a, b, x > 0$, $b \neq 1$ die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-b^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{1+x^{2n}}$$

konvergieren.

Aufgabe H10.2 (10 Punkte):

Untersuche folgende Doppelreihen auf Konvergenz:

$$\text{(a)} \ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(n+m)^{-2}, \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} m^{-n}.$$

Aufgabe H10.3 (10 Punkte):
Es sei $\emptyset \neq I$ eine Menge und $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}-$Vektorraum. Für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und Funktionen $\begin{array}{rcl} x : I & \to & X \\ i & \mapsto & x_i \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} y : I & \to & X \\ i & \mapsto & y_i \end{array}$ sei $\begin{array}{rcl} \lambda x + \mu y : I & \to & X \\ i & \mapsto & \lambda x_i + \mu y_i \end{array}$. Zeige

a)
$$l^1(I;X) := \{x : I \to X : (x_i)_{i\in I} \text{ ist absolut summierbar}\}$$
und
$$l^2(I;X) := \{x : I \to X : (\|x_i\|^2)_{i\in I} \text{ ist absolut summierbar}\}$$
sind $\mathbb{K}-$Vektorräume.

b) $l^1(I;X) \subseteq l^2(I;X)$.

Aufgabe H10.4 (10 Punkte):
Zeige, daß sich die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{1,-2\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{(1-z)(z+2)} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{C}\backslash\{-1,1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{(1-z)^3(z+1)} \end{array}$$

auf einer offenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ als Grenzwert einer konvergenten Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 schreiben lassen. Bestimme den Konvergenzradius jeder dieser Reihen.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 16.01.2020, 10.15 Uhr vor der Übung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibiliothek