

# Analysis einer Variablen (LAG): Hausaufgabenblatt 1

**Aufgabe H1.1** Es seien  $X$  und  $Y$  zwei nichtleere, disjunkte Mengen (also  $X \neq \emptyset \neq Y$  und  $X \cap Y = \emptyset$ ). Definiere

$$f: \mathcal{P}(X)^2 \times \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)^2 \times \mathcal{P}(X \cup Y), \\ (A, B, C) \mapsto ((X \setminus A) \cap B, (X \setminus B) \cap A, (A \cap B) \cup C).$$

Zeige, dass  $f$  injektiv, aber nicht surjektiv ist.

**Aufgabe H1.2** Sei  $M$  die Menge aller Mordverdächtiger. Es ist also „ $\forall x \in M$ “ als „für alle Mordverdächtige  $x$ “ zu lesen, und weiter „ $k$ “ als „der Koch“, „ $p$ “ als „die Putzkraft“, „ $s$ “ als „die Stiefmutter“, „ $K(x, y)$ “ als „ $x$  hat  $y$  ermordet“, „ $A(x, y)$ “ als „ $x$  hat Angst vor  $y$ “ und „ $H(x, y)$ “ als „ $x$  hasst  $y$ “. Formuliere folgende Aussagen in Quantorenschreibweise.

- Der Koch oder die Putzkraft hat die Stiefmutter umgebracht, oder die Stiefmutter hat Selbstmord begangen.
- Man mordet nur die, die man hasst und von denen man Angst hat.
- Diejenigen, die die Stiefmutter hasst, mag die Putzkraft.
- Diejenigen, die die Stiefmutter hasst, hasst auch der Koch.
- Die Stiefmutter hasst sich selbst und sie hasst die Putzkraft.
- Der Koch hasst alle, die Angst vor der Stiefmutter haben.
- Jeder mag die Stiefmutter oder den Koch oder die Putzkraft.

Nimm nun diese Informationen als gegeben an und ermittle durch eine möglichst detaillierte logische Argumentation den Mörder der Stiefmutter.

**Aufgabe H1.3** Zeige oder widerlege, dass für alle Mengen  $A, B$  gilt:

- $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ ,
- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ .

**Aufgabe H1.4**

- Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
  - $h: X \rightarrow Y$  ist injektiv,
  - für alle Mengen  $Z$  und Funktionen  $f: Z \rightarrow X, g: Z \rightarrow X$  gilt: Ist  $h \circ f = h \circ g$ , so folgt  $f = g$ .
- Finde eine Aussage  $A(f, g, h)$  und ergänze die „?“ , sodass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
  - $h: X \rightarrow Y$  ist surjektiv,
  - für alle Mengen  $Z$  und Funktionen  $f: „?\" \rightarrow „?\", g: „?\" \rightarrow „?\"$  gilt: Ist  $A(f, g, h)$ , so folgt  $f = g$ .

Zeige die resultierende Aussage.

**Abgabe je Zweier- oder Dreiergruppe eine Lösung; bis Donnerstag 24.10.2019 10.15 Uhr vor der Übung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibliothek.**