Übungsblatt 9 zu Funktionentheorie und Spektraltheorie

Aufgabe 26: Zeige:
Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ein Operator in $\mathcal{H}$, dann sind äquivalent:

a) $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ist ein abgeschlossener Operator in $\mathcal{H}$.

b) Für jede Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(T)$ mit $\varphi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ und $T[\varphi_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi$ gilt $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ und $\psi = T[\varphi]$.

c) Versehen mit der Graphennorm

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_T : \mathcal{D}(T) &\to [0, \infty[\\ \varphi &\mapsto \left(\|\varphi\|^2 + \|T[\varphi]\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ist $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ vollständig.

Aufgabe 27: Zeige:
Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ein Operator in $\mathcal{H}$, dann sind äquivalent:

a) $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ist ein abschließbarer Operator in $\mathcal{H}$.

b) Es gibt eine abgeschlossene Fortsetzung von T.

c) Der Abschluß $\overline{\Gamma(T)}$ von $\Gamma(T)$ enthält kein Element der Form $(\mathbf{0}, y)$ mit $y \in \mathcal{H}\backslash\{\mathbf{0}\}$.

d) Für jede Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(T)$ mit $\varphi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0}$ und $T[\varphi_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi$ folgt $\psi = \mathbf{0}$.

In diesem Fall ist der Abschluß $\overline{T}$ von T gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\overline{T}) = \{\varphi \in \mathcal{H} :\ & \text{Es gibt eine Folge } (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } \mathcal{D}(T) \text{, so daß } \varphi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \\ & \text{und } (T[\varphi_n])_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert } \} \end{aligned} \tag{0.1}$$

und für eine derartige Folge ist dann

$$\overline{T}[\varphi] = \lim_{n\to\infty} T[\varphi_n].$$

Aufgabe 28: Zeige:
Es seien $S : \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$, $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ und ST dicht definierte Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann gilt:

$$T^*S^* \subseteq (ST)^*.$$

Ist sogar $S \in L(\mathcal{H})$, so gilt

$$T^*S^* = (ST)^*.$$

Aufgabe 29: Zeige:
Ist $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert und $S \in L(\mathcal{H})$, so daß der inverse Operator $S^{-1} \in L(\mathcal{H})$ existiert, dann gilt

$$(TS)^* = S^*T^*$$

Besprechung in der Übung am Mittwoch 18.12.2019