Übungsblatt 8 zu Funktionentheorie und Spektraltheorie

Aufgabe 24: Zeige:
Es sei X ein $\mathbb{C}-$Banachraum, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $f : U \to X$ analytisch, dann gilt für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$, für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und für jedes $z \in U \backslash \mathrm{Spur}\gamma$:

$$n(\gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \tag{0.1}$$

Aufgabe 25: Zeige:
Es sei X ein $\mathbb{C}-$Banachraum, $D \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, $\vec{a} = (a_1, ..., a_n) \in D$, $\vec{r} = (r_1, ..., r_n) \in]0, \infty[^n$ mit $\overline{P_{\vec{r}}(\vec{a})} \subseteq D$ und für $k \in \{1, ..., n\}$ sei $\begin{array}{rcl} \gamma_k : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & a_k + r_k e^{it} \end{array}$. Ist $f : D \to X$ analytisch in jeder der Variablen und stetig, so gilt

a) für jedes $\vec{j} = (j_1, ..., j_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $\vec{z} = (z_1, ..., z_n) \in P_{\vec{r}}(\vec{a})$ ist

$$(\partial_1^{j_1} \cdots \partial_n^{j_n} f)(z_1, ..., z_n) = \frac{(j_1!) \cdots (j_n!)}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma_1} \cdots \int\limits_{\gamma_n} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)^{j_1+1} \cdots (\xi_n - z_n)^{j_n+1}} d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

b) für jedes $\vec{j} = (j_1, ..., j_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ist

$$\left\| (\partial_1^{j_1} \cdots \partial_n^{j_n} f)(a_1, ..., a_n) \right\| \leq \sup \left\{ \| f(z_1, ..., z_n) \| : (z_1, .., z_n) \in \overline{P_{\vec{r}}(\vec{a})} \right\} \frac{(j_1!) \cdots (j_n!)}{r_1^{j_1} \cdots r_n^{j_n}}$$

Besprechung in der Übung am Mittwoch 11.12.2019