Übungsblatt 5 zu Funktionentheorie und Spektraltheorie

Aufgabe 15:
Sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und zusammenhängend, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Zeige:

a) Hat $|f|$ in $a \in U$ ein lokales Maximum, dann ist f konstant auf U.

a) Hat $|f|$ in $a \in U$ ein lokales Minimum, dann ist f konstant auf U oder $f(a) = 0$.

c) Hat $\mathrm{Re}\,(f)$ in $a \in U$ ein lokales Maximum, dann ist f konstant auf U.

d) Hat $\mathrm{Im}\,(f)$ in $a \in U$ ein lokales Maximum, dann ist f konstant auf U.

e) Hat $\mathrm{Re}\,(f)$ in $a \in U$ ein lokales Minimum, dann ist f konstant auf U.

f) Hat $\mathrm{Im}\,(f)$ in $a \in U$ ein lokales Minimum, dann ist f konstant auf U.

Aufgabe 16: Zeige:
Es sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt. $\overline{U}$ bezeichne den Abschluß von U, $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ sei stetig und $f|_U$ analytisch, dann gilt:

a) $|f|$ nimmt auf dem Rand $\partial U = \overline{U} \backslash U$ ein Maximum an.

b) f hat in U eine Nullstelle oder $|f|$ nimmt auf ∂U ein Minimum an.

c) $\mathrm{Im}\,(f)$ und $\mathrm{Re}\,(f)$ nimmt auf dem Rand ∂U ein Maximum an.

d) $\mathrm{Im}\,(f)$ und $\mathrm{Re}\,(f)$ nimmt auf ∂U ein Minimum an.

Aufgabe 17: Es sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $\gamma_0 : [a, b] \to U$ und $\gamma_1 : [a, b] \to U$ seien stückweise C^1-Wege und es existiert eine Homotopie bzw. Schleifenhomotopie $H : [a, b] \times [0, 1] \to U$ in U mit $H(\cdot, 0) = \gamma_0$ und $H(\cdot, 1) = \gamma_1$. Zeige: Es lassen sich für $\varepsilon > 0$ Zerlegungen

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = b \quad \text{von } [a, b]$$

und

$$0 = s_0 < s_1 < ... < s_{n-1} < s_n = 1 \quad \text{von } [0, 1]$$

mit $t_k - t_{k-1} < \varepsilon$ für $k = 1, ..., m$ und $s_l - s_{l-1} < \varepsilon$ für $l = 1, ..., n$ und eine Homotopie bzw. Schleifenhomotopie $\widehat{H} : [a, b] \times [0, 1] \to U$ in U finden, mit $\widehat{H}(\cdot, 0) = \gamma_0$, $\widehat{H}(\cdot, 1) = \gamma_1$ so daß $\widehat{H}(t_k, \cdot)$ und $\widehat{H}(\cdot, s_l)$ stückweise C^1-Wege für $k = 1, ..., n$ und $l = 1, ..., n - 1$ sind.

Besprechung in der Übung am Mittwoch 20.11.2019