Übungsblatt 4 zu Funktionentheorie und Spektraltheorie

Aufgabe 12: Zeige:
Es seien $\vec{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ und $\vec{r} = (r_1, ..., r_n) \in]0, \infty[^n$.

a) Der „offene“ Polyzylinder

$$P_{\vec{r}}(\vec{a}) := \{\vec{z} = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_k - a_k| < r_k \text{ für alle } k = 1, ..., n\}$$

ist in der Normtopologie von $\mathbb{C}^n$ offen.

b) $P_{\vec{r}}(\vec{a})$ ist konvex.

c) Die offenen Polyzylinder $P_{\vec{r}}(\vec{a}), \vec{r} \in]0, \infty[^n$, bzw. $\vec{r} \in \{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\}^n$ bilden eine Umgebungsbasis von $\vec{a}$ bzgl. der Normtopologie.

d) Für den Abschluß $\overline{P_{\vec{r}}(\vec{a})}$ von $P_{\vec{r}}(\vec{a})$ in der Normtopologie gilt

$$\overline{P_{\vec{r}}(\vec{a})} = \{\vec{z} = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_k - a_k| \leq r_k \text{ für alle } k = 1, ..., n\}$$

Aufgabe 13: Zeige:
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, dann ist

$$\begin{array}{rcl} f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : D & \to & \mathbb{C}^m \\ \vec{z} = (z_1, ..., z_n) & \mapsto & \begin{pmatrix} f_1(\vec{z}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{z}) \end{pmatrix} \end{array}$$

genau dann analytisch, wenn jede der Funktionen $\begin{array}{rcl} f_1 : D & \to & \mathbb{C} \\ \vec{z} & \mapsto & f_1(\vec{z}) \end{array}$,..., $\begin{array}{rcl} f_m : D & \to & \mathbb{C} \\ \vec{z} & \mapsto & f_m(\vec{z}) \end{array}$
analytisch ist.

Aufgabe 14: Es sei X ein $\mathbb{C}-$Banachraun, dann heißt eine Funktion $f : \mathbb{C}^n \to X$ ganz, wenn sich

$$f(z_1, ..., z_n) = \sum_{(j_1, ..., j_p) \in \mathbb{N}_0^n} c_{(j_1, ..., j_n)} z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n}$$

für alle $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ schreibt mit einer Potenzreihe $\left(c_{(j_1, ..., j_n)} z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n}\right)_{(j_1, ..., j_n) \in \mathbb{N}_0^n}$, die für alle $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ absolut summierbar ist. Zeige: Sind $f : \mathbb{C}^n \to X$ und $g_1 : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}$,..., $g_n : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}$ ganze Funktionen, dann ist auch $\begin{array}{rcl} h : \mathbb{C}^q & \to & X \\ (u_1, ..., u_q) & \mapsto & f(g_1(u_1, ..., u_q), ..., g_n(u_1, ..., u_q)) \end{array}$
eine ganze Funktion.

Besprechung in der Übung am Mittwoch 13.11.2019