Mathematisches Institut der Universität München 30.10.2019

Übungsblatt 3 zu Funktionentheorie und Spektraltheorie

Aufgabe 8: Zeige:
Es seien X, Y Banachräume, $u : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung und $(x_i)_{i\in I}$ eine (absolut) summierbare Familie in X, dann ist $(u[x_i])_{i\in I}$ eine (absolut) summierbare Familie in Y und es gilt

$$u\left[\sum_{i\in I} x_i\right] = \sum_{i\in I} u[x_i].$$

Aufgabe 9: Zeige:
Es seien $X_1, ..., X_n, Y$ Banachräume, $u : X_1 \times ... \times X_n \to Y$ eine stetige, multilineare Abbildung, $(x_{i_k})_{i_k\in I_k}$ eine absolut summierbare Familie in X_k für $k = 1, ..., n$. Dann ist

$$(u[x_{i_1}, ..., x_{i_n}])_{(i_1,...,i_n)\in I_1\times...\times I_n}$$

eine absolut summierbare Familie in Y und für die Grenzwerte gilt:

$$\sum_{(i_1,...,i_n)\in I_1\times...\times I_n} u[(x_{i_1}, ..., x_{i_n})] = u\left[\sum_{i_1\in I_1} x_{i_1}, ..., \sum_{i_n\in I_n} x_{i_n}\right].$$

Aufgabe 10:

Zeige: Es sei X ein $\mathbb{C}-$Banachraum, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in X, $a \in \mathbb{C}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$.

a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < \rho$ absolut konvergent und divergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| > \rho$.

b) Für jedes $s \in]0, \rho[$ gibt es ein $C_s \in]0, \infty[$ mit

$$\sup\{\|b_n\||z-a|^n : n \in \mathbb{N}_0, |z-a| \le s\} \le C_s.$$

und die Potenzreihe konvergiert absolut und lokal gleichmäßig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \rho\}$

Aufgabe 11:

Zeige: Es sei X ein $\mathbb{C}-$Banachraum, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in X und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ eine Potenzreihe, mit Konvergenzradius $\rho > 0$, also ist

$$\begin{aligned} f : \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \rho\} &\to X \\ z &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \end{aligned}$$

wohldefiniert. Gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $c_n \neq 0$, so gibt es ein $r \in]0, \rho]$, so daß $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z-a| < r$ erfüllt ist.

Besprechung in der Übung am Mittwoch 6.11.2019