Übungsblatt 2 zu Funktionentheorie und Spektraltheorie

Aufgabe 4: Zeige:
Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, (Y, d) ein metrischer Raum und $(f_i : X \to Y)_{i \in I}$ ein Netz in Abb und $f : X \to Y$ eine Abbildung und $f_i \overset{i \in I}{\longrightarrow} f$ konvergiert lokal gleichmäßig. Sind f_i stetig für alle $i \in I$, dann ist f stetig.

Aufgabe 5:
Ersetze in einer geeigneten Potenzreihe in einer Variablen z durch $z_1 z_2$ und finde damit ein Beispiel einer Potenzreihe in den Variablen (z_1, z_2), die in Punkten $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$, aber nicht im Punkt $\frac{1}{2}(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ absolut summierbar ist.

Aufgabe 6:
Zeige: Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U$., dann ist

$$\begin{aligned} \ln|f| : U &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \ln(|f(z)|) \end{aligned} \qquad \text{harmonisch.}$$

Aufgabe 7:
Zeige: Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $r > 0$ mit $\overline{K(0,r)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\} \subseteq U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch, $f(0) \neq 0$ und $a_1, ..., a_N \in \overline{K(0,r)}$ die Nullstellen von f in $\overline{K(0,r)}$ entsprechend der Vielfachheiten wiederholt. Dann gilt:

$$\ln(|f(0)|) = -\sum_{k=1}^{N} \ln(\frac{r}{|a_k|}) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(|f(re^{it})|dt$$

Besprechung in der Übung am Mittwoch 30.10.2019