Mathematisches Institut der Universität München 24.1.2020

Übungsblatt 12 zu Funktionentheorie und Spektraltheorie

In der Situation von Satz 5.2.1, also
Es sei $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Operator und $W \subseteq \sigma(T)$ sei beschränkt und offen und abgeschlossen in der Relativtopologie von $\sigma(T)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Gamma(\sigma(T), W) \quad := \quad & \{\Gamma : \Gamma \text{ ist Zyklus in } \rho(T) \text{ aus geschlossenen stückweisen } C^1-\text{Wegen mit} \\ & n(\Gamma, z) = 1 \text{ für } z \in W \text{ und } n(\Gamma, z) = 0 \text{ für } z \in \sigma(T) \backslash W\} \neq \emptyset\end{aligned}$$

und

$$P_W := -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (T - z)^{-1} dz \tag{0.1}$$

ist unabhängig von der Wahl von $\Gamma \in \Gamma(\sigma(T), W)$.

Aufgabe 36:
Ist nun $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ und T gegeben durch eine Matrix in Jordanform, so berechne explizit $P_{\{\lambda\}}$ für einen Eigenwert λ von T.

Aufgabe 37:
Bestimme im Fall $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ die Projektion P_W.

Aufgabe 38:
Es sei $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Operator und $\lambda \in \sigma(T)$ ein isolierter Punkt von $\sigma(T)$. Dann gibt es $r > 0$, so daß

$$\begin{array}{rcll} \gamma_r : [0, 2\pi] & \to & \rho(T) & \in \Gamma(\sigma(T), \{\lambda\}) \\ t & \mapsto & \lambda + re^{it} & \end{array}$$

ist und es sei

$$P_{\{\lambda\}} := -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} (T - z)^{-1} dz.$$

Zeige: Ist nun $\mathrm{Ran}(P_{\{\lambda\}})$ endlichdimensional, so ist λ ein Eigenwert von T.

Besprechung in der Übung am Mittwoch 29.1.2020