Übungsblatt 11 zu Funktionentheorie und Spektraltheorie

Aufgabe 33: Zeige:
Es sei $T \in L(\mathcal{H})$, dann gilt für $\lambda \in \rho(T)$ und $\begin{array}{rcl} k_\lambda : \mathbb{C}\backslash\{\lambda\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z-\lambda} \end{array}$ und jede Polynomfunktion $\begin{array}{rcl} p : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n \end{array}$:

a) $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}(T) = T$

b) $k_\lambda(T) = (T-\lambda)^{-1}$

c) $p(T)$ stimmt mit dem durch Komposition und Bilden von Linearkombinationen definierten Operator $a_0\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + a_1 T + ... + a_n T^n \in L(\mathcal{H})$ überein.

Aufgabe 34: Zeige:
Es sei $T \in L(\mathcal{H})$ und $f : U \to \mathbb{C} \in \mathcal{A}(T)$, dann gilt

$$f(\sigma(T)) \supseteq \sigma(f(T)) \tag{0.1}$$

Aufgabe 35:
Es sei $T \in L(\mathcal{H})$, $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $\sigma(T) \subseteq U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch, ferner sei $U^* := \{\overline{z} : z \in U\}$ und $\begin{array}{rcl} f^* : U^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{f(\overline{z})} \end{array}$. Zeige:

a) $f^* \in \mathcal{A}(T^*)$.

b) Ist $\gamma = [\![p_1, p_2, ..., p_n]\!]$ ein Treppenpolygon in $U\backslash\sigma(T)$ mit $n(\gamma, z) = 1$ für alle $z \in \sigma(T)$, dann ist $\gamma^* := -[\![\overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_n]\!]$ ein Treppenpolygon in $U^*\backslash\sigma(T^*)$ mit $n(\gamma^*, z) = 1$ für alle $z \in \sigma(T^*)$.

c) $\displaystyle\int_\gamma f(\xi)d\xi = -\overline{\int_{\gamma^*} f^*(\xi)d\xi}$.

d) $(f(T))^* = f^*(T^*)$.

Besprechung in der Übung am Mittwoch 22.1.2020