

## Übungsblatt 10 zu Funktionentheorie und Spektraltheorie

**Aufgabe 30:** Zeige:

Ist  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  dicht definiert, injektiv und  $\text{Ran}(T)$  dicht, dann ist auch  $T^*$  injektiv und  $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ .

**Aufgabe 31:** Zeige:

Es sei  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  ein dicht definierter Operator in  $\mathcal{H}$ , dann sind äquivalent:

- a)  $T$  ist wesentlich selbstadjungiert.
- b)  $\bar{T} = T^*$
- c)  $\bar{T}$  ist selbstadjungiert.

In diesem Fall ist  $\bar{T}$  die einzige selbstadjungierte Fortsetzung von  $T$ .

**Aufgabe 32:** Zeige:

Es seien  $S : \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{H}$  und  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  dicht definierte Operatoren in  $\mathcal{H}$ , so daß  $\mathcal{D}(S+T) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{H}$  dicht ist. Dann gilt:

- a)  $S^* + T^* \subseteq (S+T)^*$
- b) Ist  $S$  oder  $T$  beschränkt, so gilt  $(S+T)^* = S^* + T^*$ .

**Besprechung in der Übung am Mittwoch 15.1.2020**