

**Tutoriumsblatt 9 zu Mathematik III für Physiker****Aufgabe 1:**

Es sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Zeige: Für das Integral von nichtnegativen  $\mathcal{A}$ -Stufenfunktionen  $u$  und  $v$  gilt:

a)  $\int_X \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A)$

b) Für  $\alpha \geq 0$  ist  $\int_X (\alpha u) d\mu = \alpha \int_X u d\mu$ .

c)  $\int_X (u + v) d\mu = \int_X u d\mu + \int_X v d\mu$ .

d) Ist  $u(x) \leq v(x)$  für alle  $x \in X$ , dann gilt  $\int_X u d\mu \leq \int_X v d\mu$

**Aufgabe 2:**

Zeige

$$\mathcal{F}_1 := \left\{ \bigcup_{k=1}^N ]a_k, b_k] : N \in \mathbb{N}, a_k, b_k \in \mathbb{R}, a_k \leq b_k \right\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

ist ein Mengerring auf  $\mathbb{R}$ . Es existiert genau ein Inhalt  $\mu_1$  auf  $\mathcal{F}_1$ , so daß

$$\mu_1(]a, b]) = b - a \tag{1}$$

für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$  erfüllt ist. Für diesen dadurch eindeutig bestimmten Inhalt  $\mu_1$  gilt:

- $\mu_1(B) \in [0, \infty[$  für jedes  $B \in \mathcal{F}_1$ .
- $\mu_1$  ist ein Prämaß auf  $\mathcal{F}_1$ .