Tutoriumsblatt 8 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 1:
Bestimme die $\sigma-$Algebra $\sigma(\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\})$ auf $\mathbb{R}$, die von allen einelementigen Teilmengen erzeugt wird.

Aufgabe 2:
Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_1) < \infty, ..., \mu(A_n) < \infty$. Zeige:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leq j_1<...<j_k\leq n} \mu\left(\bigcap_{l=1}^{k} A_{j_l}\right) .$$

Aufgabe 3:
Es sei $\emptyset \neq X$ eine endliche Menge. Zeige:

a) Für das Zählmaß $\nu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty[$ und die Diracmaße δ_x gilt:

$$\nu = \sum_{x\in X} \delta_x$$

b) Jedes Maß $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ hat die Form

$$\mu = \sum_{x\in X} \mu(\{x\})\delta_x.$$